Análise Matemática III

LISTA 6

(1) Dados $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $R > r > 0$, considere a 2-variedade de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - R\right)^2 + (z-z_0)^2 = r^2,\, z > z_0\right\}.$$

(a) Determine a normal unitária ν com terceira componente positiva em cada ponto de M.

(b) Calcule o fluxo de $F(x,y,z) = (0,1,1)$ segundo ν, i.e. $\int_M F \cdot \nu$. *Sugestão:* Use o teorema da divergência.

(c) Repita a alínea anterior para

$$F(x,y,z) = (x + \arctan(y^2 + z^3), e^{z-x^3}, z^2 - z + 1).$$

(2) Considere o campo vectorial $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x,y,z) = (xg(z), -yg(z), z),$$

onde $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

(a) Mostre que o fluxo de f através do cilindro

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 4,\, 0 < z < 1\}$$

segundo uma normal à sua escolha, não depende de g.

(b) Mostre que f é um campo gradiente sse g é constante.

(3) *A partir do teorema da divergência, mostre o teorema de Green: Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular, e $P, Q \colon A \to \mathbb{R}$ de classe C^1 num aberto $A \supset \overline{D}$. Então,

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy.$$

(4) Indique quais dos seguintes conjuntos têm medida nula:

(a) $\{\log(|q| + 1) \colon q \in \mathbb{Q}\}$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \sin x\}$.

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \lim_{n\to+\infty} (\sin(xy))^n = 1\}$.

(d) $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e não-vazio.

(e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0,\, x - y + z = 1\}$.

(g) $\{x \in \mathbb{R}^4 \colon x_4 = e^{x_1 - x_2 \sin x_3}\}$.

(5) Indique quais das seguintes proposições são válidas q.t.p:

(a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ está numa recta de declive irracional que passa na origem.
(b) $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} n\sin(x/n) \in \mathbb{Q}$.
(c) A função $f(x, y, z) = \lim_{n\to+\infty}[1+\|(x, y, z)\|^n]^{-1}$ é contínua em $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(6) Dê um exemplo de um conjunto limitado de medida nula cuja fronteira não tenha medida nula.