Matemática I – 1º Semestre 2011/12
Ficha de exercícios

Semana 7, Parte I: Cap. 4 (cont.) – Matriz Inversa

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Sejam as matrizes M, P, Q, X quadradas, com M invertível. A solução da equação $XM + P = Q$ é $X = M^{-1}(Q - P)$: verdadeiro ou falso? Justifique a resposta.

1.2. Determine a inversa das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$, com $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

1.3. Prove que a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{8}{7} & -1 & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Seja a matriz $A_{n\times n}$. Demonstre que se A é invertível, então $|A| \neq 0$.

2.2. Demonste que a inversa de uma matriz, quando existe, é única.

2.3. Sejam A e B matrizes invertíveis e $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Demonstre as seguintes propriedades:
a) $(A^{-1})^{-1} = A$;
b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
c) $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.

3 Problemas e Modelização

3.1. Mostre que os vectores $\vec{a} = (1,1,0)$, $\vec{b} = (0,1,1)$ e $\vec{c} = (1,0,1)$ são linearmente independentes:
a) utilizando a definição de independência linear;
b) estudando a característica de uma matriz;
c) calculando o determinante de uma matriz;
d) determinando se uma matriz é invertível.

3.2. Retomemos o problema 3.1 da ficha da semana 3/4: mostre que a matriz $R(-\theta)$ é a inversa da matriz $R(\theta)$. Comente este resultado do ponto de vista geométrico.

3.3. Retomemos o problema 3.1 da semana 6: uma empresa da industria alimentar produz diariamente farinha de trigo, farinha de centeio e farinha de milho. A produção total da empresa é de k toneladas por dia. A produção diária conjunta de farinha de trigo e de centeio é o triplo da produção de farinha de milho, e a produção diária conjunta de farinha de trigo e de milho é o dobro da produção de farinha de centeio. Escreva o respectivo sistema de equações sob a forma matricial $A\vec{x} = \vec{b}$ e determine as soluções $\vec{x}$ através do cáculo de A^{-1}.

4 Exercícios adicionais

4.1. Seja A uma matriz simétrica e invertível de ordem n tal que $X'A = B + A$. Então:

a) $X = B'A^{-1} + I$ b) $X = A^{-1}B' + I$ c) $X = \left(\frac{B+A}{A}\right)'$

d) Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

4.2. Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem n. Sabendo que: $|A + B| = 3$, $|C| = 2$ e $(AX + BX)' = C$, obtenha X (em função de A, B e C) e calcule o seu determinante.

4.3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix}$.

a) Mostre que o determinante de A é igual a: $-\left(1 - x^2\right)^2$.
b) Indique os valores de x para os quais a matriz A não tem inversa.

4.4. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 16.6: Exercícios 2 a 6;
Secção 16.7: Exercícios 2 e 5.

Matemática I – 1º Semestre 2011/12
Ficha de exercícios

Semana 7, Parte II: Cap. 5 – Sucessões e Séries

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 10.4: Exercícios 2 a 4.

1.2. Determine se as seguintes séries são convergentes. Em caso afirmativo, determine a sua soma:

a) $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ b) $\sum_{n\geq 1} 3^n$ c) $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$ d) $\sum_{n\geq 3}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$ e) $\sum_{n\geq 2} 5^{-n}$.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Defina:
a) Função
b) Função real
c) Função real de variável real
d) Sucessão
e) Série.

2.2. Demonstre que $\sum_{\ell=0}^{n-1} ak^{\ell} = a\frac{k^n - 1}{k-1}$, onde $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, e n é um inteiro finito.

3 Problemas e Modelização

3.1. O João deposita no dia 1 de cada mês 100 euros na sua conta poupança, que paga juros de 5% por mês. Ao fim de 12 meses quando dinheiro tem o João na conta?

3.2. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguintes séries convergem e calcule a sua soma:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - x^2\right)^n$ b) $4x^2 + 16x^4 + 64x^6 + ...$

3.3. Utilize a teoria das séries geométricas para escrever as seguintes dizímas sob a forma de fracções irredutíveis:

a) $0,999...$ b) $1,666...$ c) $0,1212...$

3.4. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 10.4: Exercícios 6 e 7.

4 Exercícios adicionais

4.1. Considere a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{an^2+n}{n^2-1}$, com $a \in \mathbb{R}$. Indique a resposta correcta:

a) se $a \neq 0$ então a série é divergente
b) se $a \neq 0$ então a série é convergente
c) a série é convergente, $\forall a \in \mathbb{R}$
d) a série é convergente para $a = 1$.

4.2. Calcule $\sum_{n=0}^{\infty} \left[(-\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^n\right]$.

4.3. Indique para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguintes séries convergem e calcule as suas somas:

a) $\sum_{n\geq 0} (3x-4)^n$ b) $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$ c) $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(x+1)^{2n}}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2}\right)^n$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} (1-|x|)^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{(x+1)^{3n}}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{n-1}}$.

4.4. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 10.4: Exercícios 5 e 8.