

Semana 7, Parte II: Cap. 5 – Sucessões e Séries

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 10.4: Exercícios 2 a 4.

1.2. Determine se as seguintes séries são convergentes. Em caso afirmativo, determine a sua soma:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} 3^n \quad \text{c) } \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} \quad \text{d) } \sum_{n \geq 3} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \quad \text{e) } \sum_{n \geq 2} 5^{-n}.$$

2 Definições e Demonstrações

2.1. Defina:

- a) Função
- b) Função real
- c) Função real de variável real
- d) Sucessão
- e) Série.

2.2. Demonstre que $\sum_{\ell=0}^{n-1} ak^\ell = a \frac{k^n - 1}{k - 1}$, onde $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, e n é um inteiro finito.

3 Problemas e Modelização

3.1. O João deposita no dia 1 de cada mês 100 euros na sua conta poupança, que paga juros de 5% por mês. Ao fim de 12 meses quando dinheiro tem o João na conta?

3.2. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguintes séries convergem e calcule a sua soma:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (1 - x^2)^n \quad \text{b) } 4x^2 + 16x^4 + 64x^6 + \dots$$

3.3. Utilize a teoria das séries geométricas para escrever as seguintes dízimas sob a forma de fracções irredutíveis:

$$\text{a) } 0,999\dots \quad \text{b) } 1,666\dots \quad \text{c) } 0,1212\dots$$

3.4. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 10.4: Exercícios 6 e 7.

4 Exercícios adicionais

4.1. Considere a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{an^2 + n}{n^2 - 1}$, com $a \in \mathbb{R}$. Indique a resposta correcta:

- a) se $a \neq 0$ então a série é divergente b) se $a \neq 0$ então a série é convergente
c) a série é convergente, $\forall a \in \mathbb{R}$ d) a série é convergente para $a = 1$.

4.2. Calcule $\sum_{n=0}^{\infty} [(-\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^n]$.

4.3. Indique para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguintes séries convergem e calcule as suas somas:

- a) $\sum_{n \geq 0} (3x - 4)^n$ b) $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$ c) $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(x+1)^{2n}}$
d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2}\right)^n$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |x|)^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{(x+1)^{3n}}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{n-1}}$.

4.4. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 10.4: Exercícios 5 e 8.