Matemática I – 1º Semestre 2011/12
Ficha de exercícios

Semana 8: Cap. 5 – Funções Reais: Limite e Continuidade

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 6.5: Exercícios 1 e 4.

1.2. Esboce o gráfico das seguintes funções, indicando em cada caso um ou dois pontos particulares:
a) $-x^2$ b) $-\sqrt{x}$ c) e^x d) $\ln x$ e) $\dfrac{1}{x}$ f) $\sin x$ g) $\cos x$ h) $\tan x$
i) $ax+b$ com $a,b \in \mathbb{R}$ j) $|x+5|$ k) $\ln(x-5)$ ℓ) uma função ímpar.

1.3. Calcule a derivada em ordem a x das funções das alíneas *a)* a *i)* do exercício 1.2.

1.4. Para que valores reais de a e b a função $f(x) = \begin{cases} ax-2 & \text{se } x \leq 1 \\ b-2x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é contínua?

1.5. Seja $f(x) = \sqrt{x}$.
a) Indique o domínio de f e discuta a continuidade de f.
b) A função f é linear? Justifique a resposta.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Demonstre, pela definição, que: $\lim_{x \to 2} 3x+1 = 7$.

2.2. Seja uma função exponencial geral de base a: $f(t) = Ka^t$, com $a, K \in \mathbb{R}^+$. Mostre que o tempo τ de duplicação é independente do tempo inicial t, i.e. demonstre que se $f(t+\tau) = 2f(t)$, então $a^\tau = 2$.

2.3. Sejam as funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Demonstre que se f e g forem contínuas em $a \in \mathbb{R}$, então a função $(f+g)$ também é contínua em a.

3 Problemas e Modelização

3.1. Um tipo de bactéria divide-se, a cada hora, em duas bactérias idênticas à original. Após 12 horas, qual será o número de bactérias?

3.2. Estude o domínio e a continuidade das seguintes funções:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \ln\left(1+x^2\right) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

3.3. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 4.9: Exercícios 2 e 3;
Secção 4.10: Exercício 4.b;
Secção 7.8: Exercício 4.

4 Exercícios adicionais

4.1. Determine o domínio das seguintes funções.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ c) $h(x) = \ln(3-2x)$

d) $i(x) = \sqrt{x^2-25}$ e) $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ f) $k(x) = \ln(\ln x)$

g) $l(x) = \dfrac{1}{\ln(1-|x-1|)}$ h) $m(x) = \dfrac{\ln(4-x^2)}{\sqrt{e^x-1}}$.

4.2. Para cada uma das seguintes funções estude a sua continuidade, indicando os pontos de descontinuidade caso existam:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \frac{\sin(x)}{x}+2, & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \frac{\ln(x^2+3)}{x+3}$.

4.3. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 7.8: Exercícios 2, 3 e 5;
Secção 7.9: Exercícios 1 a 3;
Secção 6.5: Exercício 5.