Matemática I – 1º Semestre 2011/12
Ficha de exercícios

Semana 9: Cap. 6 – Derivadas, Diferenciais, Elasticidade

NOTA: Nesta ficha usa-se indiferentemente as seguintes notações: $\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$.

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Calcule: $\dfrac{df(x)}{dx}$, $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$, $\dfrac{d^3f(x)}{dx^3}$ e $\dfrac{df(x)}{dy}$.

1.2. Calcule o diferencial das seguintes funções em ordem à respectiva variável:

a) $x^5 + 2x^4 + 1$ b) $-\sqrt{u}$ c) e^y d) $\ln z$ e) $\dfrac{1}{x}$ f) $\sin u$ g) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1.3. Seja $f(x) = e^x$, $g(x) = \sqrt{x}$, e $h(x) = \sin x$. Determine o domínio e contra-domínio das seguintes funções:

a) $f \circ g$ b) $f \circ h$ c) $h \circ f$ d) $h \circ f \circ g$ e) $f \circ h \circ f \circ g$

1.4. Derive as seguintes funções em ordem a x:

a) $\left(5x^{70} + 3x + 1\right)^2$ b) $\left(5x^2 + 3x + 1\right)^{70}$ c) $\cos\left(3x^5 - x\right)$ d) $e^{-\frac{x}{2}}$

e) $\sqrt{x-3}$ f) $\dfrac{1}{\ln x}$ g) $e^{\sin x}$ h) $x + \sqrt{x^2 - 1}$

i) $\ln(\sin x)$ j) $\ln\left(x^2 + 1\right)$ k) $\ln^4\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ ℓ) $e^{-\cos\left(\sqrt{x^4+x^2+1}\right)}$

1.5. Calcule a elasticidade em ordem a x de cada uma das seguintes funções:

a) e^x b) $e^{\lambda x}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ c) $\dfrac{1}{x}$ d) $\cos(x^2)$.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Seja $f(x) = x^2$. Demonstre, pela definição, que: $\dfrac{df(x)}{dx} = 2x$.

2.2. Seja $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Mostre que $\dfrac{f(a) - f(x)}{a - x} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, com $h = a - x$.

2.3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$. Dada uma variação Δx da sua variável x, a função sofre uma variação $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Demonstre que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \dfrac{x}{f(x)} f'(x)$.

3 Problemas e Modelização

3.1. O preço das acções das seguintes empresas é dado em função do tempo t por:

- Empresa A: $2t^2 + 4t$
- Empresa B: $3t^2 + t$
- Empresa C: $\frac{2t}{t^2+1}$.

a) No instante $t = 1$ qual a empresa cujo preço das acções está a crescer mais depressa?
b) Qual o período durante o qual o preço das acções da empresa C está a crescer?

3.2. Numa fábrica de chocolate em pó, o custo de produção f do chocolate, expresso em €/kg, depende do preço x do cacau, também em €/kg, da seguinte forma: $f(x) = x^2 + 3$, definido para $x \geq 0$. Considere um cenário em que o preço do cacau mudou de 1 €/kg para 2 €/kg. Responda às seguinte perguntas (indicando as unidades adequadas):
a) Qual foi a variação absoluta do preço do cacau?
b) Qual foi a variação absoluta do preço do chocolate?
c) Qual foi a variação relativa do preço do cacau?
d) Qual foi a variação relativa do preço do chocolate?
e) Qual foi a taxa de variação absoluta do preço do chocolate face ao aumento do preço do cacau.
f) Qual foi a taxa de variação relativa do preço do chocolate face ao aumento do preço do cacau.
g) Considere agora um acréscimo infinitesimal dx no preço x do cacau. Calcule a taxa de variação absoluta e a taxa de variação relativa (elasticidade) do preço do chocolate face a este aumento infinitesimal do preço do cacau.

3.3. Seja a função $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ e^{-kx} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, com $k > 0$.
a) Indique o domínio de f e esboce o gráfico da função.
b) Discuta a continuidade da função no seu domínio.
c) Discuta a diferenciabilidade de f no seu domínio.
d) Considere a função $g(x) = \sqrt{x}$. Discuta a continuidade e a diferenciabilidade de $g \circ f$, e calcule a sua derivada onde possível.

3.4. Seja a função $h(x) = f(x \ln x)$, com f diferenciável em $\mathbb{R}$. Sabendo que $f(0) = \sqrt{3}$ e que $f'(0) = 2$, indique a equação da recta tangente ao gráfico da função h em $x = 1$.

3.5. Estude a diferenciabilidade das funções do exercício 3.2 da ficha da semana 8.

4 Exercícios adicionais

4.1. Seja $f(x) = \frac{1}{2}x^k h(x)$, com $k \in \mathbb{R}$ e h função real diferenciável no seu domínio. Calcule $El_x f(x)$.

4.2. Seja f uma função diferenciável duas vezes em $\mathbb{R}$ tal que: $2x^2 + 6xf(x) + [f(x)]^2 = 18$. Calcule $\dfrac{df(x)}{dx}$ e $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

4.3. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis e $k \in \mathbb{R}$. Mostre que:

a) $\dfrac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right] = \dfrac{df(x)}{dx} + \dfrac{dg(x)}{dx}$.

b) $\dfrac{d}{dx}\left[kf(x)\right] = k\dfrac{df(x)}{dx}$.

4.4. Seja $f(x) = e^x$, $g(x) = x^n$ com $n \in \mathbb{Z}$, e $h(x) = \sin x$. Calcule:

a) $\dfrac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)+h(x)\right]$ b) $\dfrac{d}{dx}\left[5f(x)+2g(x)\right]$ c) $\dfrac{d}{dx}\left[g(x)h(x)\right]$

d) $\dfrac{d}{dx}\left[f(x)g(x)h(x)\right]$ e) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{h(x)}{f(x)}\right]$ f) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}\right]$.

4.5. Derive as seguintes funções em ordem a x:

a) $\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^2$ b) $\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)^3$ c) $\sqrt{e^x+1}$ d) $e^{-\sqrt{x}}$

e) $e^{x^3}\ln\left(x^2\right)$ f) $\dfrac{3}{\sqrt{x}}$ g) $\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{x-1}}$ h) e^{x^2}

i) $\ln\left(e^{3x}+x^2\right)$ j) $e^x \ln x$ k) $\sin(2x+1)$ ℓ) xe^x

m) $\cos x + x\cos^2\left(x^2\right)$ n) $\sin x \cos x$ o) $\tan\left(x^2+1\right)$ p) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

4.6. Três empresas de moldes plásticos têm os seguintes custos de produção, que dependem directamente do preço p do petróleo:

- Empresa 1: $5p^3 + 2p + 1$
- Empresa 2: $2p^{3/2} + p$
- Empresa 3: $\sqrt{p} + \frac{1}{p}$.

a) Determine para cada empresa a taxa de variação média do custo de produção dada uma variação do preço do petróleo de 1 €/ℓ para 4 €/ℓ.
b) Determine para cada empresa a taxa de variação instantânea do custo de produção quando o preço do petróleo é de 1 €/ℓ.
c) Sabendo que durante um breve período de crise $t \in [0; 2]$ o preço do petróleo em função do tempo foi: $p(t) = e^t$, determine qual a empresa cujo custo de produção estava a crescer mais depressa no instante $t = 1$.

4.7. Sejam f e g duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$ tais que $h(x) = f[g(x)]$. Sabendo que $f(-1) = 2$, $f'(-1) = 1/3$, $g(3) = -1$, e $g'(3) = -4$, indique a equação da recta tangente ao gráfico da função h, em $x = 3$:

a) $y = -\frac{4}{3}x + 2$ b) $y = -\frac{4}{3}x + 6$ c) $y = -4x + 2$ d) $y = -x + 5$

4.8. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 6.2: Exercícios 5 e 7.