Análise Matemática III

LISTA 8

(1) (Conjunto de Cantor) Considere $A_0 = [0,1]$. Divida-o em três partes iguais e retire o intervalo aberto do meio $I_1 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Obtemos assim $A_1 = I_0 \cup I_2$ onde $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ e $I_2 = [\frac{2}{3}, 1]$. Repita o processo para I_0 e I_1, obtendo $A_2 = I_{00} \cup I_{02} \cup I_{20} \cup I_{22}$ onde $I_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, etc. Continuando, temos uma sucessão de conjuntos A_n.

(a) Prove que $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é não vazio.

(b) Prove que A tem medida nula.

(c) *Prove que A não é numerável.
Sugestão: Escreva $x \in [0,1]$ na base 3 na forma $x = (0.a_1a_2\dots)_3$ onde
$$x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{3^k}$$
e $a_k \in \{0,1,2\}$. Note que $x \in A$ sse $a_k \in \{0,2\}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

(d) **Considere a função de Cantor $f\colon [0,1] \to [0,1]$ dada por
$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{2^{k+1}}$$
onde $x = \sum_k a_k/3^k$, $a_k \in \{0,1,2\}$, e $N = \inf\{k\colon a_k = 1\}$. Mostre que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, f é crescente, constante em cada subintervalo de $[0,1] \setminus A$, contínua em $[0,1]$, $f' = 0$ q.t.p, $f(1-x) = 1 - f(x)$ e $2f(x/3) = f(x)$.

(2) *Mostre que $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ têm a mesma cardinalidade. *Sugestão*: Use o facto de o conjunto de Cantor ter a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$ e medida nula.

(3) Mostre que se $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, então $\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \sigma(\mathcal{A}_2)$, e que $\sigma(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(\mathcal{A})$.

(4) Mostre que $\mathcal{A} = \{[a, +\infty[\colon a \in \mathbb{R}\}$ gera a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$.

(5) Seja $\Omega = \{0,1\}^n \subset \mathbb{R}^n$, i.e. os elementos de Ω são vectores em $\mathbb{R}^n$ com componentes 0 ou 1. Considere a medida $\mu\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ definida para cada $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ por $\mu(\{\omega\}) = \frac{1}{2^n}$.

Dados $a_1, \dots a_m \in \{0,1\}$ com $1 \leq m \leq n$, definimos
$$A_{a_1,\dots,a_m} = \{\omega \in \Omega\colon \omega_i = a_i,\ i = 1, \dots, m\}$$
e $\mathcal{A}_m = \{A_{a_1,\dots,a_m}\colon a_i \in \{0,1\}\}$.

(a) Mostre que μ é uma medida de probabilidade.
(b) Calcule $\mu(A_{a_1,\dots,a_m})$.
(c) Determine a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}_2$.
(d) *Mostre que o cardinal da σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}_m$ é 2^{2^m}.

(6) Seja μ uma medida numa σ-álgebra $\mathcal{F}$. Mostre que na definição de medida, a condição $\mu(\emptyset) = 0$ pode ser substituída pela existência de um conjunto $E \in \mathcal{F}$ com medida finita, $\mu(E) < +\infty$.