

### Análise Matemática III

#### LISTA 9

- (1) Indique se, para uma função mensurável  $f$ , o conjunto de nível  $f^{-1}(\{a\})$  é mensurável para qualquer  $a \in \mathbb{R}$ .
- (2) Considere a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}(\mathbb{R})$  dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue em  $\mathbb{R}$ . Determine se qualquer função monótona  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  com  $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ , é mensurável.
- (3) Seja  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  mensurável à Lebesgue com  $E \in \mathcal{M}$  tal que  $m(E) < +\infty$ . Considerando a função  $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\omega(x) = m(\{y \in E: f(y) > x\}),$$

determine:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x)$
  - (b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \omega(x)$
  - (c) a monotonia de  $\omega$
  - (d)  $\lim_{x \rightarrow a^+} \omega(x)$
  - (e)  $\lim_{x \rightarrow a^-} \omega(x)$
  - (f) se  $m(f^{-1}(\{a\})) = 0$  implica que  $\omega$  é contínua em  $a$ .
- (4) Indique quais as funções simples e para essas calcule os seus integrais relativamente à medida de Lebesgue<sup>1</sup>:
    - (a)  $f = \chi_{[1,+\infty[} + \chi_{]-\infty,-1]}$
    - (b)  $f = 2\chi_{[0,+\infty[} - 3\chi_{]1,+\infty[}$
    - (c)  $f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & x \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$
    - (d)  $f(x) = \begin{cases} x, & x^{-1} \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$
    - (e)  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq 1 \\ -3, & 1/2 < x < 1, 0 \leq y \leq 1/2 \\ 2, & 1/2 < x < 1, 1/2 < y < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$
    - (f)  $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k k^{-1} \chi_{]0,1/k]}$
    - (g)  $f(x) = [x] \chi_{[-100,100]}$
    - (h)  $f(x, y) = ([x] + [y]) \chi_{[0,2] \times [0,2]}(x, y)$

<sup>1</sup>Note que  $[x]$  é a parte inteira de  $x$ , i.e.  $[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z}: k \leq x\}$ .

$$(i) f(x, y) = \left( \left[ \frac{3}{1+x} \right] \chi_{]0,2[}(y) - \left[ \frac{2}{1+y} \right] \chi_{]0,3[}(x) \right) \chi_{]0,+\infty[ \times ]0,+\infty[}(x, y)$$

(5) Para  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , considere a medida de Dirac

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Prove que:

- (a)  $\delta_a$  é uma medida em  $\mathbb{R}^n$ .
- (b)  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\delta_a = \varphi(a)$  onde  $\varphi$  é uma função simples.
- (c)  $\int_{\mathbb{R}^n} f d\delta_a = f(a)$  onde  $f \geq 0$ .