Matemática I – 1º Semestre 2011/12
Ficha de exercícios

Semana 13: Cap. 9 – Extremos e Concavidades

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 8.6: Exercício 4 e 5;
Secção 8.7: Exercício 5 e 6.

1.2. Seja a função $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 12$.

a) Determine os pontos de estacionariedade da função f.
b) Determine os extremos da função f estudando a sua segunda derivada.
c) Indique se os extremos são locais ou globais.

1.3. Seja a função $f\colon I \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sin(x^2)$, com $I = [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$.

a) Determine os pontos de estacionariedade da função f.
b) Determine os extremos da função f estudando a sua segunda derivada.
c) Indique se os extremos são locais ou globais.

1.4. Sejam as funções $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ e $h(x) = x^3$.

a) Determine os pontos de estacionariedade de cada uma destas funções.
b) Através das derivadas de ordem 2 ou superior, determine se esses pontos correspondem a pontos de mínimo, de máximo ou de inflexão.
c) Determine as concavidades de cada uma destas funções.

1.5. Um ponto de inflexão de uma função é sempre ponto de estacionariedade dessa função: verdadeiro ou falso? Justifique a resposta.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Indique a definição de função crescente e de função decrescente.

2.2. Indique a definição de ponto de estacionariedade de uma função real de variável real.

2.3. Seja a função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com segunda derivada continua em I, e a um ponto do interior de I.
a) Indique a definição de ponto de inflexão de f.
b) Prove que se a é um ponto de inflexão de f, então $f''(a) = 0$.

3 Problemas e Modelização

3.1. Um congelador avariado opera entre -3ºC e +2ºC e tem um consumo de energia que varia com a sua temperatura t segundo: $t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 6t + 10$.

a) Determine as temperaturas para as quais o consumo de energia é máximo e é mínimo.
b) A função consumo de energia tem algum ponto de inflexão?

3.2. Seja a funçao: $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{se}\, x < -1 \\ |x| & \text{se } -1 \leq x \leq +1 \\ e^{-x+1} & \text{se}\, x > +1 \end{cases}$.

a) Qual o domínio da função f?
b) Discuta a continuidade e a diferenciabilidade de f no seu domínio.
c) Determine os pontos de estacionariedade da função f.
d) Determine os extremos da função f, indicando se são locais ou globais.
e) Determine os extremos da função f no intervalo $[-4, -1]$.

3.3. Considere a função $f(x) = x \sin x$.
a) Calcule o polinómio de Taylor de segunda ordem de f em torno do ponto 0.
b) A função f tem um único ponto de estacionariedade no intervalo aberto $]-1;1[$. Determine-o.
c) Classifique o ponto de estacionariedade obtido na alínea anterior através do estudo da segunda derivada.
d) Existem outros pontos de extremo de f no intervalo $]-1;1[$? Justifique a resposta.

3.4. Considere a função $F(x) = \int_0^x tf(t)dt$, onde f é uma função contínua e estritamente positiva em $\mathbb{R}$. Prove que $x = 0$ é um minimizante local da função $F(x)$.

4 Exercícios adicionais

4.1. Seja a função f e o intervalo I do exercício 1.3. Mostre que f tem pelo menos dois pontos de inflexão no intervalo I.

4.2. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que: $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$. Prove que a é um ponto de máximo local de f.

4.3. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 8.6: Exercícios 1, 3 e 6;
Secção 8.7: Exercícios 2 a 4.