Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2011/2012

EXAME ÉPOCA NORMAL 9 Janeiro 2012

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Justifique todos os cálculos

(1) (a) Parametrize uma curva no plano que descreva a letra "J".

(b) Calcule o integral do campo vectorial $X(x, y) = (1, 0)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ao longo da curva da alínea anterior.

(2) Considere uma superfície M em $\mathbb{R}^3$ parametrizada em torno do ponto $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ por $\phi \colon V \to \mathbb{R}^3$,

$$\phi(\theta, \varphi) = (\cos\theta\, \cos\varphi, \cos\theta\, \sin\varphi, \cos\theta),$$

com $V =]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \frac{\pi}{2}[$.

(a) Determine os espaços tangente e normal a M em p.

(b) Dada a função $f(x, y, z) = y$ em $\mathbb{R}^3$, calcule o integral de f em $\phi(V)$.

(3) Calcule:

(a) a distância média à origem dos pontos em $\mathbb{R}^2$ contidos num círculo com raio R centrado na origem.

(b) os pontos em $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z\}$ mais próximos de $(0, 0, 1)$.

(c) o centróide de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon r \le x^2 + y^2 + z^2 \le R,\ x, y, z \ge 0\},$$

onde $0 < r < R$.

(4) Considere a medida de contagem $\mu(A) = \#A$ com $A \subset \mathbb{N}$, e a função mensurável $f(n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Definindo $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$, calcule $\nu(\{1, 2, \ldots, 10\})$ e mostre que ν é uma medida.

(b) Calcule $\int_A \frac{1}{n} \, d\nu(n)$ onde $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$.

(5) Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e o espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Seja A_k, $k \in \mathbb{N}$, uma sucessão de conjuntos mensuráveis com medida total. Mostre que a sua intersecção também tem medida total.