

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2011/2012

EXAME ÉPOCA RECURSO 25 Janeiro 2012

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Justifique todos os cálculos

- (1) (a) Parametrize uma curva no plano que descreva a letra “Ω”.
(b) Calcule o integral do campo vectorial $X(x, y) = (1, 1)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ao longo da curva da alínea anterior.

(2) Calcule:

(a) a distância média à origem dos pontos de \mathbb{R}^3 contidos no interior da esfera com raio R centrada na origem.

(b) o centróide de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + x^2 \leq y^2, 0 < y < 1\}.$$

(c) o integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

(3) Seja $\alpha > 0$ e

$$S_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, z < \alpha\}.$$

(a) Determine a normal unitária exterior ν a S_α .

(b) Calcule o fluxo do campo vectorial

$$X(x, y, z) = (z^2 y^3, x^2 + z^2, xy)$$

através de S_α segundo ν .

(4) Dado $a \in \mathbb{R}$, considere a medida de Dirac

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

com $A \subset \mathbb{R}$, e a seguinte função

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{10} i \delta_i(A).$$

(a) Obtenha o valor de $\mu(\mathbb{R})$ e mostre que μ é uma medida.

(b) Calcule $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} d\mu(n)$.

(5) Mostre que um subconjunto de \mathbb{R}^n com medida de Lebesgue total é denso.