# Matemática I

1º semestre – 2012/13

## Licenciatura em Economia

## Exercícios com soluções

## 1 Álgebra Linear

### Vectores e Matrizes

**1.1.** Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinar as matrizes:

a) $A + B$; b) $A - B$; c) $AB$; d) $BA$; e) $(AB)C$; f) $A(BC)$

**Solução:**

a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 19 & -5 & 16 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -9 \\ 19 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 23 & 8 & 25 \\ 92 & -28 & 76 \\ 4 & -8 & -4 \end{bmatrix}$

f) idem

**1.2.** Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine $A^T$, $B^T$, $(A+B)^T$, $AB$, $(AB)^T$, $B^TA^T$, $A^TB^T$ e identifique as propriedades da transposição de matrizes que os cálculos ilustram.

**Solução:**

$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$; $B^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; $(A+B)^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$; $AB = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$; $(AB)^T = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$;
$A^TB^T = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$

**1.3.** Determine os valores de $a$ para os quais a matriz seguinte é simétrica

$$\begin{bmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & -1 \end{bmatrix}$$

**Solução:** $a = 2$.

## Matriz inversa

**1.4.** Prove que a inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$ e a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{8}{7} & -1 & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

**Solução:** $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{8}{7} & -1 & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{8}{7} & -1 & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**1.5.** Determine os valores de $a$ e $b$ tais que a matriz $A$ é inversa de $B$, sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ a & \frac{1}{4} & b \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

**Solução:**

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + \frac{1}{4} + 3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$$

**1.6.** Usando operações elementares, determine as matrizes inversas de

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 8 \\ -9 & -6 & 3 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

**Solução:** a) $\begin{bmatrix} -2 & \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 3 & -\frac{4}{5} & -\frac{14}{5} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{32} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$
e) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} \frac{21}{34} & -\frac{2}{17} & \frac{11}{102} \\ -\frac{23}{34} & \frac{3}{17} & -\frac{25}{102} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

## Dependência e independência linear. Característica de uma matriz

**1.7.** Determine, nos espaços vectoriais respectivos, se os vectores seguintes são linearmente independentes:

a) $(3,1)$ e $(4,2)$ de $\mathbb{R}^2$.

b) $(3,1)$, $(4,-2)$ e $(7,2)$ de $\mathbb{R}^2$.

c) $(0,-3,1)$, $(2,4,1)$ e $(-2,8,5)$ de $\mathbb{R}^3$.

d) $(-1,2,0,2)$, $(5,0,1,1)$ e $(8,-6,1,-5)$ de $\mathbb{R}^4$.

**Solução:** a) Linearmente independentes; b) Linearmente dependentes: $\begin{cases} \alpha_1 = 22\alpha_2 \\ \alpha_3 = -10\alpha_2 \end{cases}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$;
c) Linearmente independentes; d) Linearmente dependentes: $\begin{cases} \alpha_1 = 3\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$.

**1.8.** Discuta, em função do parâmetro real $\alpha$, a independência linear dos vectores $a = (1,-2)$ e $b = (\alpha,-1)$ de $\mathbb{R}^2$.

**Solução:** Se $\alpha \neq \frac{1}{2} \Longrightarrow$ Linearmente independentes; se $\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow$ Linearmente dependentes: $x_1 = -\frac{x_2}{2}$, $x_2 \in \mathbb{R}$.

**1.9.** Determine a característica das seguintes matrizes

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

**Solução:** a) r(M)=1; b) r(M)=2; c) r(M)=2; d) r(M)=3; e) r(M)=2; f) r(M)=3.

**1.10.** Determine a característica das seguintes matrizes, em função dos valores dos parâmetros.

a) $\begin{bmatrix} x & 0 & x^2-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & x & x-1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} t+3 & 5 & 6 \\ -1 & t-3 & -6 \\ 1 & 1 & t+4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 \\ 0 & z & w & 1 \\ 1 & x & y & 1 \\ 0 & z & w & 1 \end{bmatrix}$

**Solução:** a) Se $x = -1$ ou $x = 2$, então $r(M) = 2$. Nos restantes casos, $r(M) = 3$;
b) Se $t = \pm 2$ ou $t = -4$, então $r(M) = 2$. Nos restantes casos, $r(M) = 3$;
c) Se $z = 0$ e $w = 0$, então $r(M) = 2$. Nos restantes casos, $r(M) = 3$.

**1.11.** Encontre um exemplo, com matrizes $2 \times 2$, que ilustre o facto de em geral se ter $r(AB) \neq r(BA)$.

**Solução:** A=$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; AB=$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, BA=$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $r(AB) = 0 \neq r(BA) = 1$.

## Determinantes

**1.12.** Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Calcule $|A|$, $|A^T|$, $|AB|$, $|B|$, $|B^T|$, $|A^T B^T|$ e identifique as propriedades que os cálculos ilustram.

**Solução:** $|A| = -2 = |A^T|$; $|B| = |B^T| = -2$; $|AB| = 4 = |A^T B^T|$;

**1.13.** Calcule os determinantes seguintes.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 11 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 12 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

**Solução:** a) 2 b) 30 c) 0 d) $-abc$ e) $abcd$ f) 360 g) 4.

**1.14.** Mostre que os determinantes seguintes são nulos.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x-y & x-y & x^2-y^2 \\ 1 & 1 & x+y \\ y & 1 & x \end{vmatrix}$

**Solução:** a) $C_2 = 2C_1$ b) $(a+b+c)C_1 = C_2 + C_3$ c) $(x-y)L_2 = L_1$

**1.15.** Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = A^{\intercal} \times B$. Determine o determinante da matriz $C$.

**Solução:** $|C| = 0$

**1.16.** Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule o determinante da matriz $C = (B \times A)^T$.

**Solução:** $|C| = 0$

**1.17.** Determine os valores de $a$ para os quais a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 1-a & a \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ tem como determinante o valor $-12$.

**Solução:** $a = \pm 2$

### Sistemas de equações

**1.18.** Usando a Regra de Cramer, resolva os sistemas de equações

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 2x - y + z = 6 \\ x - y - 3z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 2 \\ y + z + u = 6 \\ y + u = 1 \end{cases}$

c) Determine $p$ de forma a que o sistema seguinte tenha solução. Encontre as soluções.

$$\begin{cases} px + y = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$$

**Solução:** a) $x = 1, y = -2, z = 2$ b) $x = -3, y = 6, z = 5, u = -5$
c) O sistema tem solução se e só se $p \neq 1$. A solução é $x = -\frac{2}{p-1}, y = \frac{3p-1}{p-1}, z = \frac{3p+1}{p-1}$.

**1.19.** Prove que o sistema seguinte tem solução única quaisquer que sejam $b_1, b_2, b_3$ e determine-a

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = b_1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = b_2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = b_3 \end{cases}$$

**Solução:** A matriz do sistema é invertível, pelo que o mesmo admite solução única, qualquer que seja o segundo membro. A solução é $x_1 = \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{10}b_2 - \frac{1}{5}b_3, x_2 = -\frac{1}{2}b_1 + \frac{3}{10}b_2 + \frac{3}{5}b_3, x_3 = -\frac{1}{2}b_1 + \frac{7}{10}b_2 + \frac{2}{5}b_3$.

**1.20.** Mostre que o sistema homogéneo

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ bx + cy + az = 0 \\ cx + ay + bz = 0 \end{cases}$$

tem soluções não triviais se e só se $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$.

**Solução:** Um sistema homogéneo só pode ter soluções não triviais (não nulas) se a matriz de sistema não for invertível, isto é, se o seu determinante for zero. Neste caso o determinante da matriz de sistema é justamente $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, donde se segue o resultado pretendido.

**1.21.** Discuta as soluções do sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -x + ay - 21z = 2 \\ 3x + 7y + az = b \end{cases}$$

em função dos parâmetros $a$ e $b$.

**Solução:** Se $a \neq 0 \wedge a \neq 7$ o sistema tem solução única independentemente do parâmetro $b$. Se $a = 0$, o sistema apenas tem solução se $b = \frac{9}{2}$. Se $a = 7$, o sistema tem solução apenas se $b = \frac{10}{3}$.

**1.22.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2q \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4q \\ 3x_1 - 2x_2 + px_3 = q \end{cases}$$

onde $p$ e $q$ são constantes arbitrárias. Determine para que valores destas constantes o sistema possui: a) uma única solução; b) várias soluções; c) nenhuma solução.

**Solução:** a) $p \neq 3$ b) $p = 3 \wedge q = 0$ c) $p = 3 \wedge q \neq 0$

**1.23.** Mostre que o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = k \\ x + cy = 1 \end{cases}$$

tem uma única solução, excepto para um valor particular $c^*$ de $c$. Determine essa solução. Mostre também que para $c = c^*$, o sistema não tem soluções excepto para um valor particular $k^*$ de $k$. Encontre a solução para $k = k^*$.

**Solução:** O determinante da matriz de sistema só é zero quando $c = \frac{3}{2}$. Assim, para $c \neq \frac{3}{2}$,o sistema tem uma e uma só solução que é $y = -\frac{k-2}{-3+2c}, x = \frac{-3+kc}{-3+2c}$. Quando $c = \frac{3}{2}$ o sistema só tem solução se $k = 2$, neste caso a solução é da forma $\left(x, \frac{2}{3}(1-x)\right)$.

**1.24.** Encontre os valores de $a$ e $b$ para os quais o sistema $\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + az = b - 3 \end{cases}$ é possível mas indeterminado.

**Solução:** O sistema é possível e indeterminado (com 1 grau de liberdade) para $a = \frac{7}{5} \wedge b = 3$

**1.25.** Discuta a natureza do sistema, em função do parâmetro $\alpha$

$$\begin{cases} x + 2y + z + w = 0 \\ 2x + 4y + 2z + 3w = 1 \\ x + 2y + z + 2w = \alpha \end{cases}$$

**Solução:** Se $\alpha = 1$, o sistema é possível e indeterminado (com 1 grau de liberdade).
Se $\alpha \neq 1$, o sistema é impossível.

**1.26.** Discuta a existência de soluções para os sistemas que se seguem, determinando, sempre que possível, o número de graus de liberdade e as soluções.

a) $\begin{cases} -2x - 3y + z = 3 \\ 4x + 6y - 2z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z + w = 2 \\ 2x - y + z - 3w = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y + 2z + w = 1 \\ 2x + y - z + 3w = 3 \\ x + 5y - 8z + w = 1 \\ 4x + 5y - 7z + 7w = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + 2z + w = 5 \\ 2x + 3y - z - 2w = 2 \\ 4x + 5y + 3z = 7 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + 3y + 2z + 4w = 0 \\ 2x + y - w = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x - y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + y - z + w = 1 \\ x - y + z - w = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x + y - z + w = 1 \\ 3x - 2y + 2z - 3w = 2 \\ 5x + y - z + 2w = -1 \\ 2x - y + z - 3w = 4 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ y + 2z = 1 \\ 2x + y + 4z = 2 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x + y + 2z + w = 1 \\ y + 3z + 3w = 2 \\ -x + z + 2w = 1 \\ 2x + y + z - w = 0 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 2x + y + 3z - w = 1 \\ 4x - y + 7z - 7w = -5 \\ x + 2y + z + 2w = 3 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - z + w = 2 \\ x + y + z + w = -1 \\ y + w = 3 \end{cases}$ n) $\begin{cases} x + 2y - z + w = 1 \\ 2x + y + z - w = -2 \\ x + z + w = 1 \\ 2x + 5y - 3z + 5w = 5 \end{cases}$ o) $\begin{cases} y - z + w = 4 \\ -x + y + 2z + w = 1 \\ -x + z + 2w = -2 \\ -2x + y + 7z - w = -3 \end{cases}$

p) $\begin{cases} x - y + z + 2w = 1 \\ -x + 2y + z - w = 1 \\ y + 2z + w = 2 \\ 2x - 3y + 3w = 0 \end{cases}$ q) $\begin{cases} x + y - z + w = 2 \\ 2x + y - z + w = 1 \\ x + 2y - 2z + 2w = 5 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ r) $\begin{cases} x - y + 2z + w = 1 \\ 3x + 2z + 2w = 2 \\ 2x + y + w = 1 \\ x + 8y - 10z - 2w = -2 \end{cases}$

**Solução:**

a) Sistema impossível.

b) Sistema possível e indeterminado (2 graus de liberdade). Soluções da forma $\left(1+\frac{2}{3}w, 1-\frac{5}{3}w+z, z, w\right)$.

c) Sistema possível e indeterminado (1 grau de liberdade). Soluções da forma $\left(-\frac{1}{3}z, \frac{5}{3}z, z, 1\right)$.

d) Sistema impossível.

e) Sistema possível e determinado. A solução é $(0,0,0)$.

f) Sistema possível e indeterminado (1 grau de liberdade). Soluções da forma $(w,-w,-w,w)$.

g) Sistema possível e determinado. A solução é $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

h) Sistema possível e determinado. A solução é $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}, \frac{7}{10}\right)$.

i) Sistema impossível.

j) Sistema possível e determinado. A solução é $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

k) Sistema possível e indeterminado (2 graus de liberdade).
Soluções da forma $(-1+z+2w, 2-3z-3w, z, w)$.

l) Sistema impossível.

m) Sistema possível e determinado. A solução é $(-5,-4,1,7)$.

n) Sistema impossível.

o) Sistema possível e indeterminado (1 grau de liberdade). Soluções da forma $\left(\frac{3}{2}+3w, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2}+w, w\right)$.

p) Sistema possível e indeterminado (2 graus de liberdade).
Soluções da forma $(3-3z-3w, 2-2z-w, z, w)$.

q) Sistema possível e indeterminado (1 grau de liberdade). Soluções da forma $(-1,-2+z,z,5)$.

r) Sistema possível e indeterminado (2 graus de liberdade).
Soluções da forma $\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}w-\frac{2}{3}z, -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}w+\frac{4}{3}z, z, w\right)$.

**1.27.** Discuta, em função dos parâmetros $a$,$b$ e $c$, os seguintes sistemas lineares:

a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ x-y-z=a \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ 2x-2y+az=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y+az=0 \\ x+by=0 \\ by+az=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=a \\ 2x+bz=2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x+y=b \\ 3x+2y+z=0 \\ x+ay+z=2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} ax+y-z+aw=0 \\ (a+1)y+z+w=1 \\ -x+y+(a+1)w=b \end{cases}$

g) $\begin{cases} ax+y+(a+1)z=b \\ x+ay+z=1 \\ ax+y-z=0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ ax+z=2 \\ 3x+y+3z=6 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x+y=a \\ x+2y=a^2 \\ x+3y=a^3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} -2x+(a+3)y-bz=-3 \\ x+bz=1 \\ 2x+4y+3bz=-b \end{cases}$ m) $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ x+az=1 \\ x+y+2z=b \\ 2x-y+(a+2)z=2 \end{cases}$ n) $\begin{cases} 2x+4y+bz=2 \\ x+(a+2)y=1 \\ x+by+az=1 \\ x+2y=c \end{cases}$

**Solução:**

a) Qualquer que seja $a$: sistema possível e determinado.

b) Se $a \neq 2$ sistema possível e determinado; Se $a = 2$, sistema possível e indeterminado (com 1 grau de liberdade).