Lições de Matemática

Maria do Rosário Grossinho, João Paulo Janela
Universidade Técnica de Lisboa

Versão provisória vp1

Capítulo 1

Matrizes e Determinantes

Versão provisória (1)

1.1 Generalidades

Definição 1 *Dados dois números inteiros positivos m e n, chama-se* ***matriz*** *sobre $\mathbb{R}$ de ordem $m \times\ n$ à tabela formada por $m{\times}n$ números reais, dispostos em m linhas (horizontais) e n colunas (verticais)*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

.

Obs: Cada elemento da matriz é indicado por a_{ij}, onde i indica a linha e j a coluna em que o elemento se situa. A matriz A pode também ser representada de forma abreviada $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ou simplesmente $A = [a_{ij}]$

O conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ tem como notação $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ou simplesmente $\mathbb{M}_{m \times n}$.

Definição 2 ***Igualdade de Matrizes*** *Duas matrizes são iguais se, e somente se, tiverem mesma ordem e todos os elementos na mesma posição forem iguais, isto é, sendo $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, A e B são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$, para $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ...n$.*

Matrizes Especiais

Matriz-Linha
É uma matriz $m \times n$ onde $m = 1$, ou seja, a matriz-linha possui apenas uma linha.

Matriz-Coluna
É uma matriz $m \times n$ onde $n = 1$, ou seja, a matriz-coluna possui apenas uma coluna.
Matriz Quadrada
É uma matriz $m \times n$ onde $m = n$, ou seja, numa matriz quadrada o número de linhas é igual ao número de colunas. É dita simplesmente matriz de ordem "n".
Matriz Diagonal
É uma matriz quadrada em que todos os elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos.
Matriz Triangular Superior
É uma matriz quadrada em que todos os elementos que estão localizados abaixo da diagonal principal são iguais a zero.
Matriz Triangular Inferior
É uma matriz quadrada em que todos os elementos que estão localizados acima da diagonal principal são iguais a zero.
Matriz Identidade
É uma matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Tem por notação I_n, ou simplesmente I.
Matriz Nula
É uma matriz $m \times n$ cujos elementos são todos nulos. Tem por notação $O_{m\times n}$, ou simplesmente O

1.2 Operações com matrizes

As operações possíveis envolvendo duas ou mais matrizes são a Adição, Multiplicação e Transposição. Referiremos ainda a Multiplicação de uma matriz por um escalar

1. Adição de Matrizes:

A soma de duas matrizes efectua-se somando os respectivos elementos homólogos (os elementos que se encontram na mesma posição); isto é, sendo $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, tem-se $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$.

Só podem ser somadas matrizes da mesma ordem e a matriz obtida terá a mesma ordem das matrizes somadas.

Propriedades

a) $A + B = B + A$ (propriedade comutativa)

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (propriedade associativa)

c) $A + O = O + A = A$ (existência de elemento neutro - a matriz nula)

d) $A + (-A) = (-A) + A = O$ (existência de elemento simétrico), onde $-A$ é matriz formada pelos simétricos dos elementos de A na mesma posição.

2. Multiplicação de uma Matriz por um número real

A multiplicação de uma matriz por um número real é efectuada multiplicando cada elemento da matriz pelo número real em questão, isto é, $k.A = k.\left[a_{ij}\right] = \left[ka_{ij}\right]$.

Propriedades

a) $k.(c.A) = (k.c).A$
b) $(k+c).A = k.A + c.A$
c) $k.(A+B) = k.A + k.B$
d) $1.A = A$
e) $0.A = O$
f) $k.O = O$

Obs: A subtracção de matrizes, da mesma ordem, $A - B$, não é mais que a soma de A com $-B$, isto é, com a matriz simétrica de B.

3. Multiplicação de Matrizes

Para que o produto de duas matrizes, A e B, seja possível, o número de colunas de A tem de ser igual ao número de linhas de B. Sendo $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times q}$, define-se AB como a matriz de ordem $m \times q$ de elemento geral na linha i e coluna j dado por $a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \cdots + a_{in}.b_{nj}$, isto é,

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}\right]_{m\times q}.$$

Propriedades:

a) $A.B$ é em geral diferente de $B.A$, isto é, o produto *não* é comutativo
b) $(A.B).C = A.(B.C)$ (propriedade associativa)
c) $C.(A+B) = C.A + C.B$ (propriedade distributiva à direita)
d) $(A+B).C = A.C + B.C$ (propriedade distributiva à esquerda)
e) $A.I = I.A = A$ (existência de elemento neutro - a matriz identidade)
f) $A.O = O$ (existência de elemento absorvente - a matriz nula)

4. Matriz Transposta

Dada uma matriz A, define-se como **matriz transposta** de A, e representa-se por A^T, a matriz cujas linhas são as colunas de A, e reciprocamente. Mais precisamente se $A = \left[a_{ij}\right]$ então $A^T = \left[a_{ji}\right]$.

Por exemplo: Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -5 & 0 & 8 \\ 2 & -9 & 22 \\ 0 & 40 & -3 \end{bmatrix}$ tem-se $A^T = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -9 & 40 \\ 7 & 8 & 22 & -3 \end{bmatrix}$

Observe que a ordem da matriz A é 4×3 e a ordem da matriz transposta A^T é 3×4.

Com efeito, se a matriz original possuir ordem $m\times n$, a matriz transposta terá ordem $n \times m$.

Propriedades da matriz transposta:
a) $(A^T)^T = A$
b) $(A+B)^T = A^T + B^T$
c) $(k.A)^T = k.A^T$
d) $(A.B)^T = B^T.A^T$

No caso de matrizes quadradas, se $A = A^T$, então dizemos que a matriz A é **simétrica** e se $A = -A^T$, dizemos que a matriz A é **anti-simétrica**.

1.3 Matriz Inversa

Uma matriz A quadrada, de ordem n, é **invertível** se existir uma matriz B, também de ordem n, tal que multiplicada por A quer à direita quer à esquerda , dá como resultado a matriz identidade de ordem n. Isto é,

$$A.B = I = B.A$$

Diz-se então que B é a **Matriz inversa** de A e usa-se como notação $B = A^{-1}$

Uma matriz invertível também é designada por matriz não singular.

Teorema 3 *Se uma matriz A for invertível, então a matriz inversa de A é única.*

Demonstração: Suponhamos que existem duas matrizes $A', A'' \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tais que

$$A.A' = I = A'.A \qquad \text{e} \qquad A.A'' = I = A''.A.$$

Então

$$A' = A'.I = A'.(A.A'') = (A'.A).A'' = I.A'' = A''.$$

Logo $A' = A''$, o que mostra que a inversa é única.■

Teorema 4 *1. Sejam A e B duas matrizes invertíveis de ordem n. Então a matriz produto $A.B$ é invertível e a sua inversa $(A.B)^{-1}$ é o produto das inversa de A e B por ordem inversa, isto é,*

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

2. Seja A uma matriz invertível. Então:
(i) a sua inversa também é invertível e tem como inversa a matriz A, isto é

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

(ii) a sua matriz transposta também é invertível e tem como inversa a matriz transposta da inversa de A, isto é

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

Método de cálculo da matriz inversa

Princípio geral - Dado o produto de duas matrizes AB, todas as alterações feitas na matriz A por meio de operações elementares afectam do mesmo modo o produto AB.

Mas o que são **operações elementares**? São as seguintes operações sobre linhas de uma matriz:

1. Multiplicação de uma linha da matriz por um número real diferente de zero

2. Soma a uma das linhas da matriz uma outra linha multiplicada por um número real

3. Permutação de quaisquer duas linhas da matriz

Uma matriz que resulta de matriz identidade por meio de uma operação elementar chama-se **matriz elementar.**

Exemplo 5 *Vejamos exemplos de matrizes elementares que ilustram as operações elementares anteriores efectuadas na matriz identidade de ordem 4.*

1. *Multiplicação da linha* 3 *pelo número real* 5

$$D_3\left(5\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. *Soma da linha* 4*, previamente multiplicada por* -6*, à linha* 2

$$E_{2,4}(-6)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. *Permutação das linhas* 2 *e* 4

$$P_{2,4}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Voltemos então ao processo para calcular a inversa, caso exista, de uma matriz quadrada A, de ordem n. Pretendemos determinar uma matriz X tal que

$$A.X = I_n.$$

O método consiste em

- efectuar operações elementares sobre as linhas da matriz A, de forma sucessiva, até obter a matriz identidade I_n

- simultaneamente, efectuar as mesmas operações elementares sobre as linhas da matriz I_n.

Efectuados os passos anteriores,

- a matriz A dá origem à matriz identidade I_n

- a matriz identidade dá origem a A^{-1}.

Nota 6 *Registamos aqui, sem demonstração, que a realização de uma operação elementar numa matriz A é equivalente a multiplicar essa matriz pela matriz elementar que se obtém da identidade pela operação elementar em causa. Aliás é este facto que justifica o princípio geral enunciado no início desta secção*

Exemplo 7 *Vejamos com um exemplo, como se utiliza o método anterior. Seja* $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$*, e procuremos a inversa de A, isto é, a matriz X tal que:*

$$A.X = I.$$

Tem-se então o exemplo seguinte, em que indicamos, na primeira coluna, as matrizes elementares que, multiplicando ambos os membros da igualdade, realizam as operações elementares descritas na segunda coluna. O resultado dessa operações elementares aparece na terceira coluna

Matrizes elementares	**Operações elementares**	**Resultado das operações elementares**
		$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
P_{13}	Permutação da 1^a e 3^alinhas	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$E_{3,1}\left(-2\right)$	Adição da 1^alinha, multiplicada por -2, à 3^alinha	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$
$D_2\left(\frac{1}{2}\right)$	Multiplicação da 2^a linha por $\frac{1}{2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$
$D_3\left(-\frac{1}{9}\right)$	Multiplicação da 3^a linha por $-\frac{1}{9}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$
$E_{2,3}\left(-\frac{3}{2}\right)$	Adição da 3^alinha, multiplicada por $-\frac{3}{2}$, à 2^alinha	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$
$E_{1,3}\left(-5\right)$	Adição da 3^alinha, multiplicada por -5, à 1^alinha	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$
$E_{1,2}\left(-3\right)$	Adição da 2^alinha, multiplicada por -3, à 1^alinha	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{3}{2} & \frac{8}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$

Então $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{3}{2} & \frac{8}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Tendo em conta a observação anterior, podemos escrever a sequência de alterações efectuadas, em termos de produto de matrizes elementares, bem como o seu resultado, do seguinte modo:
− no primeiro membro

$$\underbrace{\left[E_{1,2}\left(-3\right)\left[E_{1,3}\left(-5\right)\left[E_{2,3}\left(-\frac{3}{2}\right)\left[D_3\left(-\frac{1}{9}\right)\left[D_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[E_{3,1}\left(-2\right)\left[P_{1,3}.A\right]\right]\right]\right]\right]\right]\right].X}$$

$$= I.X = X$$

$-$ no segundo membro

$$\underbrace{\left[E_{1,2}\left(-3\right)\left[E_{1,3}\left(-5\right)\left[E_{2,3}\left(-\frac{3}{2}\right)\left[D_3\left(-\frac{1}{9}\right)\left[D_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[E_{3,1}\left(-2\right)\left[P_{13}.I\right]\right]\right]\right]\right]\right]}_{=A^{-1}}$$

Observemos que podemos escrever o processo anterior do seguinte modo condensado

$$\left[A\vdots I\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{P_{1,3}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{E_{3,1}(-2)}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \underset{D_2(\frac{1}{2})}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\underset{D_3(-\frac{1}{9})}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{array}\right] \underset{E_{2,3}(-\frac{3}{2})}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{array}\right]$$

$$\underset{E_{1,3}(-5)}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{5}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{array}\right] \underset{E_{1,2}(-3)}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{18} & -\frac{3}{2} & \frac{8}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{array}\right]$$

Observemos que primeiramente obtivemos uma matriz triangular superior e, em seguida, por eliminação "ascendente", foram anulados os elementos acima da diagonal principal. Este processo, conhecido por **algoritmo de Gauss-Jordan,** permite calcular a inversa de uma matriz "manualmente". Computacionalmente, o cálculo da inversa de uma matriz faz-se a partir de uma factorização com matrizes triangulares. Este tópico está, contudo, fora do âmbito do presente curso. No mercado existe *software* adequado à inversão de matrizes.

1.4 Equações Matriciais

Uma igualdade que envolve matrizes é designada por **Equação Matricial.** Resolver uma equação matricial consiste em determinar uma matriz incógnita X que satisfaça a igualdade em causa. As propriedades das matrizes, estudadas nas secções anteriores, constituem os meios disponíveis para a utilização dos princípios fundamentais das igualdades conducentes a transformar, por passos sucessivos, a igualdade inicial numa igualdade final em que X fique isolada no primeiro membro. O valor de X será pois dado pela expressão do segundo membro.

Com efeito, sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n. Sabendo que B é invertível, pretendemos determinar a matriz X tal que

$$2A + BX = 3B.$$

Ora, aplicando sucessivamente as propriedades referidas nas secções anteriores, passamos da equação dada para outra equivalente. Vejamos, de forma muito pormenorizada, os passos dados e as justificações respectivas:

- por adição da matriz simétrica de $2A$ a ambos os membros

$$-2A + (2A + BX) = -2A + 3B$$

- pela propriedade associativa da adição de matrizes

$$(-2A + 2A) + BX = -2A + 3B$$

- pela definição de matriz simétrica

$$O + BX = -2A + 3B$$

- como a matriz O é o elemento neutro da adição de matrizes

$$BX = -2A + 3B$$

- multiplicando ambos os membros por B^{-1} (multiplica-se do mesmo lado, uma vez que o produto de matrizes não é comutativo)

$$B^{-1}(BX) = B^{-1}(-2A + 3B)$$

- pela propriedade associativa da multiplicação de matrizes

$$\left(B^{-1}B\right)X = B^{-1}(-2A + 3B)$$

- pela definição de matriz inversa

$$I.X = B^{-1}(-2A + 3B)$$

- como a matriz I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes

$$X = B^{-1}(-2A + 3B).$$

Na prática, efectuam-se vários passos ao mesmo tempo, desde que isso não origine confusão.

1.5 Característica de uma Matriz

Vectores

Consideremos o conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ onde $n \in \mathbb{N}$. Os elementos de $\mathbb{R}^n$ designam-se por vectores reais. Usa-se como notação $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Em $\mathbb{R}^n$ podem definir-se as seguintes operações de *soma* e *produto por escalar* $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)\end{aligned}$$

Tomando quaisquer vectores de $\mathbb{R}^n$, $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$, e quaisquer escalares, α, $\beta \in \mathbb{R}$, são satisfeitas as propriedades seguintes,

- relativamente à soma

- $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$: (propriedade comutativa)
- $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$: (propriedade associativa)
- $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$. (existência de elemento neutro)
- $\overline{x} + (-\overline{x}) = \overline{0}$ (existência de simétricos)

-relativamente ao produto por escalar

- $\alpha \cdot (\overline{x} + \overline{y}) = \alpha \cdot \overline{x} + \alpha \cdot \overline{y}$
- $(\alpha + \beta) \cdot \overline{x} = \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{x}$
- $(\alpha\beta) \cdot \overline{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{x})$
- $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$

O facto de em $\mathbb{R}^n$, as operações de soma e produto por escalar definidas acima satisfazerem as propriedades anteriores, traduz-se dizendo que $\mathbb{R}^n$ possui uma estrutura de *espaço vectorial sobre* $\mathbb{R}$ (o corpo dos escalares).

Combinações lineares

Um vector $\overline{u} \in \mathbb{R}^n$ é **combinação linear** dos k vectores $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2, ..., \overline{x}_k$, se existirem k escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ pertencentes a $\mathbb{R}$ tais que

$$\overline{u} = \alpha_1 \cdot \overline{x}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{x}_2 + ::: + \alpha_k \cdot \overline{x}_k.$$

Os escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ são designados por coeficientes da combinação linear.

Definição 8 *Diz-se que um sistema de vectores* $[\overline{x}_1, ..., \overline{x}_k]$ *é linearmente independente (abreviadamente l.i.) se*

$$\alpha_1 \cdot \overline{x}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{x}_2 + ::: + \alpha_k \cdot \overline{x}_k = \overline{0} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

isto é, se qualquer combinação linear nula dos vectores $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2, ..., \overline{x}_k$ *só for possível com os coeficientes* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ *todos nulos.*
Caso contrário, diz-se linearmente dependente (abreviadamente l.d.).

Teorema 9 *Um sistema de vectores* $[\overline{x}_1, ..., \overline{x}_k]$ *de* $\mathbb{R}^n$ *é linearmente dependente se e só se algum dos vectores for combinação linear dos restantes.*

Dem:

Em alguns casos, o teorema anterior permite reconhecer de imediato a dependência linear. Por exemplo:

Teorema 10 *Consideremos um sistema de vectores* $[\overline{x}_1, ..., \overline{x}_k]$
1. Se algum dos vectores $\overline{x}_i$ *for o vector nulo; então o sistema é linearmente dependente.*
2. Se o sistema tiver dois vectores iguais, ou múltiplos, então é linearmente dependente.

Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, cada uma das m linhas da matriz A podem ser encarada como um vector de $\mathbb{R}^n$. Analogamente, cada uma das n colunas pode ser encarada como um vector de $\mathbb{R}^m$. Podemos então pensar se as m linhas da matriz A, ou as n colunas, constituem um sistema de vectores linearmente independente. Ou, se tal não acontecer, qual é o número máximo de linhas, ou colunas, que constituem um sistema de vectores linearmente independente. E nesse caso, se há diferença entre raciocinarmos sobre linhas ou sobre colunas. Estas perguntas levam-nos ao seguinte:

Definição 11 *Chama-se característica da matriz* A*, de ordem* $m \times n$*, ao número máximo de linhas que constituem um sistema de vectores de*$\mathbb{R}^n$ *linearmente independente. Representa por* $r(A)$.

Teorema 12 *A característica de uma matriz* A *não se altera quando se efectua em* A *qualquer das operações elementares definidas anteriormente.*

Teorema 13 *Dada qualquer matriz* A*, não nula, de ordem* $m \times n$ *são válidas as seguintes afirmações*

1. *Por aplicação sucessiva de um número finito de operações elementares, A pode ser transformada numa matriz da forma*

$$\begin{bmatrix} I_k & O_{k,n\text{-}k} \\ \\ O_{m\text{-}k,k} & O_{m\text{-}k;n\text{-}k} \end{bmatrix}$$

2. O número máximo de linhas da matriz linearmente independentes é igual ao número máximo de colunas linearmente independentes.
3. $r(A) = k$

Nota 14 *Tendo em conta os teoremas anteriores, é fácil concluir que a característica de uma matriz A não se altera se for efectuada qualquer das operações elementares sobre colunas, em vez de ser sobre linhas. Isto mostra que podem efectuar-se sucessivamente operações elementares sobre linhas ou colunas sem que haja alteração da característica de A. Observa-se ainda que $r(A) = r(A^T)$*

Teorema 15 *Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível se e só se a sua característica for igual à ordem, isto é, $r(A) = n$*

1.6 Determinantes

A toda a matriz quadrada pode ser associado um número, de uma forma que veremos em seguida, a que chamamos *determinante.* Trata-se de uma quantidade muito útil, em especial pelas informações que fornece. Nomeadamente,

- diz-nos se uma matriz é invertível ou não
- permite saber se um sistema de equações lineares tem solução ou não
- é útil na determinação dos valores próprios de uma matriz.

Para introduzirmos o conceito de determinante temos primeiro de definir permutação e sinal de permutação, bem como produto elementar de uma matriz.

Permutações

Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma **permutação** do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ é uma aplicação bijectiva do conjunto nele próprio, que podemos interpretar como uma reordenação dos n números (sem repetições ou omissões). Denota-se por S_n o conjunto de todas as permutações do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Dada uma permutação $\sigma \in S_n$, e pondo $\sigma(1) = \sigma_1, \sigma(2) = \sigma_2, \sigma(3) = \sigma_3, \ldots, \sigma(n) = \sigma_n$ podemos representá-la por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \ldots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

ou, mais simplemente, $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \ldots & \sigma_n \end{pmatrix}$. Pensemos agora em "desfazer" a permutação, ou seja, no número de trocas necessário para voltar à ordenação inicial $1, 2, \ldots, n$. Este número não é único, todavia, tem sempre a mesma paridade. Daí podermos definir **paridade** da permutação. Diz-se que uma permutação σ é **par** se o número de trocas para voltar à ordenação inicial for par e **ímpar** se o número for ímpar. Então define-se **sinal de** σ do seguinte modo

$$sgn(\sigma) = \begin{cases} +1, & \text{se } \sigma \text{ for par} \\ \\ -1, & \text{se } \sigma \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Produto elementar

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, consideremos os vários produtos de n dos seus elementos escolhendo um em cada linha sem repetição de coluna. Por exemplo

$$a_{11}.a_{22}.a_{33} \ldots a_{nn}$$
$$a_{13}.a_{24}.a_{31} \ldots a_{n2}$$

ou, genericamente, usando a notação de permutação

$$a_{1\sigma_1}.a_{2\sigma_2}.a_{3\sigma_3} \ldots a_{n\sigma_n}.$$

A cada produto deste tipo chama-se **produto elementar da matriz** A. Reparemos que a permutação nos indices das colunas permite escolher em cada linha um elemento sem que haja repetição de escolha na coluna. Afectemos cada produto elementar do sinal da permutação σ, isto é,

$$sgn(\sigma).a_{1\sigma_1}.a_{2\sigma_2}.a_{3\sigma_3} \ldots a_{n\sigma_n}$$

À soma de todos os possíveis produtos elementares afectados do sinal da permutação associada aos índices de coluna, chama-se **determinante da matriz** A e representa-se por $\det(A)$ ou $|A|$. Mais precisamente,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma).a_{1\sigma_1}.a_{2\sigma_2}.a_{3\sigma_3} \ldots a_{n\sigma_n}.$$

Vejamos a que conduz a aplicação desta fórmula em alguns casos particulares.

Determinante de ordem 1

$A = [a_{11}]$ e tem como determinante

$$\det A = a_{11}$$

Determinante de ordem 2

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ tem como determinante

$$\det A = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Determinante de ordem 3

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ tem como determinante, $\det A$, a expressão seguinte:

$$a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{31}.a_{12}.a_{23} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{21}.a_{12}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32}.$$

Esta expressão fornece uma regra prática de cálculo a que se chama *regra de Sarrus*

Determinante de uma matriz triangular (superior ou inferior)

Seja A uma matriz triangular de ordem n. Então o seu determinante é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal, isto é

$$\det(A) = a_{11}.a_{22}.a_{33}.\dots.a_{nn}.$$

Tem-se como casos particulares:

1. Se A for uma matriz diagonal então $\det(A) = a_{11}.a_{22}.a_{33}.\dots.a_{nn}$.
2. O determinante da matriz identidade é 1, isto é, $\det(I_n) = 1$.
3. O determinante da matriz nula é 0, isto é, $\det(O) = 0$.

Propriedades dos Determinantes:

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então:

1. $\det(A) = \det\left(A^T\right)$

2. Se uma linha, ou coluna, de A é composta apenas por zeros, então o determinante de A é zero.

3. Se duas linhas, ou colunas, de A forem iguais, ou proporcionais, então o determinante de A é zero.

4. O determinante de A é nulo se uma linha, ou coluna, de A for combinação linear de outras linhas, ou colunas.

5. Se olharmos para uma linha de A como decomponível na soma de duas linhas tem-se

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1}+a'_{j1} & a_{j2}+a'_{j2} & \cdots & a_{jn}+a'_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
$$= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{j1} & a'_{j2} & \cdots & a'_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e, analogamente para colunas,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k}+a'_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k}+a'_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk}+a'_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
$$= \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

E ainda

1. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ então $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

2. Se B for uma matriz de ordem n, então $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.

3. Se a matriz A for invertível, então $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Atenção: o determinante da soma de matrizes não é a soma dos determinantes de cada uma

Proposição 16 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n.*

1. Então são equivalentes as afirmações seguintes:

(i) A matriz A é invertível.
(ii) $\det(A) \neq 0$.
(iii) $r(A) = n$

2. Se A for invertível então $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Cálculo de determinantes através de operações elementares

Vejamos que alterações são provocadas no determinante de uma matriz quando nesta são efectuadas operações elementares:

1. A multiplicação de uma linha da matriz por um número real β diferente de zero afecta o seu determinante multiplicando-o por β, isto é,

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta.a_{j1} & \beta.a_{j2} & \cdots & \beta.a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \beta.\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. A soma, a uma das linhas da matriz, de uma outra linha multiplicada por um número real não altera o valor do determinante

A permutação de quaisquer duas linhas da matriz afecta o determinante multiplicando-o por (-1), isto é, trocando as linhas d e k,

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots\cdots & a_{dn} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots\cdots & a_{dn} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

O que acabámos de ver fornece-nos um processo de cálculo do determinante de uma matriz quadrada. Com efeito, usando operações elmentares sobre linhas podemos reduzir o determinante da matriz dada a um determinante de uma matriz triangular superior, registando em cada operação a alteração determinada no determinante. Depois, para calcular o determinante da matriz triangular, basta, como vimos anteriormente, multiplicar os elementos da diagonal principal.

As afirmações dos pontos 1., 2. e 3. permanecem válidas se, no seu enunciado, substituirmos "linhas" por "colunas".

Cálculo do determinante pelo Teorema de Laplace

Consideremos uma matriz quadrada de ordem n. Retiremos-lhe a linha i e a coluna j. Obtemos então a submatriz quadrada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

O determinante desta submatriz chama-se **menor** (i, j) e representa-se por A_{ij}; note-se que o índice ij indica precisamente a linha i e a coluna j, que são retiradas. Ao valor $(-1)^{i+j}A_{ij}$ chama-se **complemento algébrico** de a_{ij}.

Teorema 17 - *Teorema de Laplace - Seja* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz quadrada de ordem* n.
(i) Seja k *uma das linhas de* A. *Então* $\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}A_{kj}$ ***(Desenvolvimento ao longo da linha*** k*)*
(ii) Seja l *uma das suas colunas. Então* $\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+l}a_{il}A_{il}$ ***(Desenvolvimento ao longo da coluna*** l*)*

Nota 18 *:*

1. Na aplicação do Teorema de Laplace convém escolher a linha, ou coluna, da matriz com o maior número possível de zeros, pois isso permite anular algumas das parcelas em (i), ou (ii), o que simplifica os cálculos.

2. No cálculo de determinantes é frequentemente efectuado pela combinação dos vários métodos estudados, bem como das propriedades enunciadas, como a prática ilustrará.