Análise Matemática III

LISTA 1 [1]

(1) Seja o conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| = 1\}.$$

Usando o teorema da função implícita, determine quais os pontos de A para os quais y pode ser expresso em função de x. Analise os restantes pontos.

(2) Seja $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2, x - y).$$

Mostre pelo teorema da função implícita que numa vizinhança de $(1,1,0)$ o conjunto $F^{-1}(\{(2,0)\})$ é o gráfico de uma função $f \colon I \to \mathbb{R}^2$ onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

(3) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(0) \neq 0$, mas não é invertível numa vizinhança de 0. Explique porque é que este exemplo não contradiz o teorema da função inversa.

(4) Seja $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (u,v)$ onde

$$\begin{cases} u = x - y + \log(1 + xy) \\ v = x + y - x^2 y^2. \end{cases}$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(0,0)$ onde f tem inversa C^1 em torno de $f(0,0)$. Calcule $\frac{\partial x}{\partial v}(0,0)$.

(5) *Assumindo a validade do teorema da função inversa, demonstre o teorema da função implícita. *Sugestão*: Considere $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $F \in C^1(S, \mathbb{R}^m)$, $n > m$, e a equação $F(x,y) = 0$ onde $(x,y) \in S$, $x \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $y \in \mathbb{R}^m$. Aplique o teorema da função inversa a $H(x,y) = (x, F(x,y))$.

[1]Comentários e/ou correcções para jldias@iseg.utl.pt. As questões mais difíceis encontram-se marcadas com *. A colaboração entre colegas é encorajada, mas cada estudante deve escrever as suas próprias soluções, compreendê-las e dar crédito aos seus colaboradores.