Análise Matemática III

LISTA 3

(1) Descreva parametricamente e determine a dimensão de cada uma das seguintes variedades:
   (a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1,\ y > |x|,\ |z| < 2\}$.
   (b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 = 1\}$.
   (c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 3\}$.

(2) Considere as variedades seguintes e determine as suas dimensões e espaços tangente e normal no ponto p:
   (a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1,\ z = x^2 - y^2\}$, $p = (1, 0, 1)$
   (b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 = z^2+1,\ 0 < z < 2\}$, $p = (0, \sqrt{2}, 1)$

(3) Determine os extremos de f em S:
   (a) $f(x, y) = x$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 2y^2 = 3\}$.
   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $S = \{(x, 2) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}\}$.
   (c) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $S = \{(x, \cos x) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}\}$.
   (d) $f(x, y, z) = x$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 2,\ x + z = 1\}$.

(4) Decomponha a unidade num produto de três números positivos cuja soma seja mínima. *Sugestão*: Escreva a soma como uma função a minimizar, sobre a superfície que corresponde ao produto de três números positivos.

(5) *Considere uma matriz A simétrica 3×3 não nula, e a função $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{2} x \cdot Ax.$$

Sabendo que f tem máximo e mínimo em

$$S^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \colon x \cdot x = 1 \right\},$$

mostre que existe $x_0 \in S^2$ e $\beta \neq 0$ tais que $Ax_0 = \beta x_0$.