

Análise Matemática III

LISTA 6

- (1) Calcule o integral do campo vectorial X ao longo do caminho indicado:
- (a) $X(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$, na curva $y = x^2$ entre $(-1, 1)$ e $(1, 1)$.
 - (b) $X(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, na curva $y = 1 - |1 - x|$ entre $(0, 0)$ e $(2, 0)$.
 - (c) $X(x, y) = (2a - y, x)$, no caminho $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
 - (d) $X(x, y) = (x + y, x - y)$, na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ numa volta no sentido anti-horário.
 - (e) $X(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, y)$, num segmento de recta entre $(1, 0, 2)$ e $(3, 4, 1)$.
 - (f) $X(x, y, z) = (x, y, xz - y)$, no caminho $\gamma(t) = (t^2, 2t, 4t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.
- (2) Esboce o caminho $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$, e calcule a sua massa se a densidade de massa ao longo da curva é dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
- (3) Seja $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = (y^2, 2xy + z, y + 5)$.
- (a) Determine se F é o gradiente de uma função escalar $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (b) Calcule $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$ para o caminho $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ e a curva $\Gamma = \gamma([0, \pi])$.
- (4) Calcule o centróide de $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.
- (5) Considere a superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ obtida como a intersecção entre o cilindro $x^2 + y^2 \leq 2x$ com o cone $x^2 + y^2 = z^2$. Calcule $\int_M f$ onde $f(x, y, z) = x^4 - y^4 + y^2z^2 - x^2z^2 + 1$.
- (6) * Seja $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ onde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = f(x, y), (x, y) \in V\}$ com $f \in C^1(V)$ e $V \subset \mathbb{R}^2$. Mostre que

$$\int_M \varphi = \int_V \varphi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2} dx dy.$$