Capítulo 2

Sistemas de Equações Lineares

2.1 Generalidades

Chamamos **equação linear** nas variáveis (incógnitas) $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ a uma igualdade da forma

$$a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 + ... + a_n.x_n = b.$$

Os elementos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ e b são números reais e são denominados *coeficientes da equação*; b é denominado *termo independente*.
Temos como exemplos:

$$1) \quad 7x_1 + 9x_2 = 5$$

$$2) \quad -2x + 5y - 7z = 20$$

$$3) \quad x - 5y - 2z + 3w = 10$$

Chamamos **solução de uma equação linear** a todo o vector $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ que, ao serem feitas as subsituições $x_i = s_i$, nas incógnitas x_i, com $1 \leq i \leq n$, origina uma proposição verdadeira.

Por exemplo, a equação

$$x - 5y - 2z + 3w = 10$$

tem como solução $(1, 0, 0, 3)$ uma vez que, substituindo na equação os valores $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ e $w = 3$, obtem-se a igualdade $1-5\times0-2\times0+3\times3 = 10$. Contudo, esta não é a única solução. Por exemplo, $(0, -2, 3, 2)$ é também solução, uma vez que $0 - 5 \times (-2) - 2 \times 3 + 3 \times 2 = 10$. Com efeito, existem infinitas soluções (um número infinito de vectores de $\mathbb{R}^4$) que satisfazem à equação dada.

Definimos como **sistema de equações lineares** um conjunto de duas ou mais equações lineares. Genericamente, representa-se da seguinte forma um sistema de m equações a n incógnitas

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + ... + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + ... + a_{2n}.x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + a_{m3}.x_3 + ... + a_{mn}.x_n = b_m, \end{array}\right. \tag{2.1}$$

onde

$x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são as n incógnitas
$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são os coeficientes
$b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ são os termos independentes.

O sistema (2.1) pode ser escrito na forma matricial

$$A \cdot X = B,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

A matriz A é a **matriz do sistema**, X é a matriz-coluna das incógnitas e B é a matriz-coluna dos termos independentes.

Resolver o sistema não é mais do que determinar os valores das incógnitas que satisfazem simultaneamente todas as suas equações, isto é, determinar os vectores de $\mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ que, ao serem feitas as subsituições $x_i = s_i$, nas incógnitas x_i, com $1 \leq i \leq n$, originam proposições verdadeiras simultaneamente em todas as equações.

Por exemplo, dado o sistema de equações:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + 3y = 12 \\ x + y + 2z = 15 \\ x - 2z = -7 \end{array}\right.$$

o vector de $\mathbb{R}^3$ $(3, 2, 5)$ é solução uma vez que subsituindo $x = 3$, $y = 2$ e $z = 5$, se tem:

$$\begin{aligned} 2 \times 3 + 3 \times 2 &= 12 \\ 3 + 2 + 2 \times 5 &= 15 \\ 3 - 2 \times 5 &= -7. \end{aligned}$$

Um sistema de equações lineares diz-se **possível** se tiver, pelo menos, uma solução, sendo:

- **sistema possível e determinado** - se a solução for única.

- **sistema possível e indeterminado** - se tiver mais do que uma solução.

Caso não tenha nenhuma solução o sistema diz-se **impossível**.

Ao conjunto de todas as soluções de um sistema de equações lineares chama-se **solução geral** ou **conjunto solução.**

2.2 Discussão e classificação de sistemas lineares

Atentemos na forma matricial do sistema (2.2)

$$A \cdot X = B$$

Observemos que se a matriz A for invertível, a solução do sistema pode ser dada por

$$X = A^{-1}B.$$

À matriz do sistema, A, também se chama **matriz simples**, em contraponto com a matriz $[A|B]$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

designada **matriz ampliada** do sistema.

Quando dois sistemas possuem a mesma solução geral dizem-se **sistemas equivalentes**.

Pelos princípios das igualdades, sabemos que obtemos um sistema equivalente ao de partida se:

1. Multiplicarmos ambos os membros de uma equação por um número real diferente de zero.

2. Somarmos a uma das equações uma das restantes multiplicada por um número real

3. Permutarmos quaisquer duas equações.

Mas estas operações correspondem precisamente a fazermos na matriz ampliada do sistema as seguintes operações elementares

1. Multiplicação de uma linha da matriz por um número real diferente de zero

2. Soma a uma das linhas da matriz uma outra linha multiplicada por um número real

3. Permutação de quaisquer duas linhas da matriz,

As operações acima enumeradas sugerem um modo de resolver o sistema dado. Com efeito, partindo do sistema

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + ... + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + ... + a_{2n}.x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + a_{m3}.x_3 + ... + a_{mn}.x_n = b_m, \end{cases}$$

escrevamos a matriz ampliada

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Em seguida façamos nela as operações elementares necessárias até transformá-la numa matriz do tipo

$$[C|D] = \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{1(j+1)} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{2(j+1)} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{3(j+1)} & \cdots & c_{3n} & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{j(j+1)} & \cdots & c_{jn} & d_j \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_m \end{array}\right].$$

Como referimos anteriormente, estas operações elementares sobre a matriz ampliada correspondem no sistema à aplicação dos princípios de igualdade que o transformam num sistema equivalente. Neste caso, no sistema seguinte, correspondente à matriz $[C|D]$:

$$\begin{aligned} x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + \ldots + 0.x_{1j} + c_{1(j+1)}.x_{(j+1)} + \ldots + c_{1n}.x_n &= d_1 \\ x_2 + 0.x_3 + \ldots + 0.x_{2j} + c_{2(j+1)}.x_{(j+1)} + \ldots + c_{2n}.x_n &= d_2 \\ x_3 + \ldots + 0.x_{3j} + c_{3(j+1)}.x_{(j+1)} + \ldots + c_{3n}.x_n &= d_3 \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ x_j + c_{j(j+1)}.x_{(j+1)} + \ldots + c_{jn}.x_n &= d_j \\ 0.x_n &= d_{j+1} \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ 0.x_n &= d_m. \end{aligned}$$

Várias conclusões podem ser tiradas de imediato:

- se algum dos termos independentes $d_{j+1}, \ldots, d_m$ for diferente de 0, o sistema é impossível

- se $d_{j+1} = \ldots = d_m = 0$, então o sistema é possível e equivalente ao sistema

$$\begin{aligned}
x_1 &= -c_{1(j+1)}.x_{(j+1)} - \ldots - c_{1n}.x_n + d_1 \\
x_2 &= -c_{2(j+1)}.x_{(j+1)} - \ldots - c_{2n}.x_n + d_2 \\
x_3 &= -c_{3(j+1)}.x_{(j+1)} - \ldots - c_{3n}.x_n + d_3 \\
&\vdots \\
x_j &= -c_{j(j+1)}.x_{(j+1)} - \ldots - c_{jn}.x_n + d_j,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

o que mostra que o sistema possui $n-j$ variáveis independentes e j variáveis dependentes, que correspondem exactamente aos j elementos da diagonal que não se anularam no processo das operações elementares (condensação). O número $n-j$ de variáveis independentes chama-se **grau de indeterminação.**

Vamos olhar para estes factos em termos das características das matrizes simples e ampliada do sistema, $r(A)$ e $r(A|B)$, respectivamente. Como sabemos, o processo de condensação não altera o valor das características, pelo que podemos determinar $r(A)$ e $r(A|B)$ olhando para $[C|D]$. Tem-se então:

- se algum dos termos independentes $d_{j+1}, \ldots, d_m$ for diferente de 0, isso é equivalente a dizer que $r(A) < r(A|B)$ (pois $r(A) = r(C) < r(C|D) = r(A|B)$). Como vimos nesse caso o sistema é impossível.

- se $d_{j+1} = \ldots = d_m = 0$, isso é equivalente a dizer que $r(A) = r(A|B)$ (pois $r(A) = r(C) = r(C|D) = r(A|B)$). Como referimos anteriormente, nesse caso o sistema é possível

Neste último caso, poderemos ainda averiguar se o sistema é possível e determinado ou possível e indeterminado. Com efeito, a matriz $[C|D]$ pode assumir um dos dois tipos:

- *tipo A*

$$[C|D] = \left[\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{1(j+1)} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{2(j+1)} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{3(j+1)} & \cdots & c_{3n} & d_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{j(j+1)} & \cdots & c_{jn} & d_j \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right].$$

se no processo de condensação houver elementos com índice de linha e coluna iguais, isto é, (j, j), que se anulem, o que equivale ao sistema (2.4) possível e indeterminado, com grau de indeterminação $n - j$ ou

- *tipo B*

$$[C|D] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right],$$

no caso de nenhum elemento da diagonal se anular, e o sistema (2.4) assume a forma

$$\begin{aligned} x_1 &= d_1 && (2.4) \\ x_2 &= d_2 \\ x_3 &= d_3 \\ &\vdots \\ x_j &= d_j \\ &\vdots && (2.5) \\ x_n &= d_n, && (2.6) \end{aligned}$$

donde o grau de indeternimação é $0 = n - n$, isto é, a solução é única. Em termos de características, tem-se, no primeiro caso, $r(A) = r(A|B) < n$ (n é o número de incógnitas) visto que $r(C) = r(C|D) < n$; e no segundo $r(A) = r(A|B) = n$.

Resumindo:

Um sistema é:

- **impossível** se e só se $r(A) < r(A|B)$
- **possível e determinado** se e só se $r(A) = r(A|B) = n$
- **possível e indeterminado** se e só se $r(A) = r(A|B) < n$

(o grau de indeterminação $n - r(A)$)

Nota 1 *Uma vez que a classificação do sistema pode ser feita através das características das matrizes simples e ampliada, não é preciso que no processo de condensação cheguemos a uma matriz na forma de $[C|D]$. Basta* *que cheguemos a uma matriz em escada, isto é, da forma*

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c}
\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \cdots & \beta_{1j} & \beta_{1(j+1)} & \cdots & \beta_{1n} & \delta_1 \\
0 & \beta_{22} & \beta_{23} & \cdots & \beta_{2j} & \beta_{2(j+1)} & \cdots & \beta_{2n} & \delta_2 \\
0 & 0 & \beta_{33} & \cdots & \beta_{3j} & \beta_{3(j+1)} & \cdots & \beta_{3n} & \delta_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{jj} & \beta_{j(j+1)} & \cdots & \beta_{jn} & \delta_j \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta_{j+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta_m
\end{array}\right]$$

pois já dá informação sobre características.

2.3 Resolução de sistemas lineares

Chama-se **sistema homogéneo** a todo o sistema da forma $AX = 0$. Um sistema homogéneo é sempre possível pois tem pelo menos a solução nula. Se for indeterminado terá outras soluções.

Teorema 2 *Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares, possível, e Y uma solução particular. Então qualquer outra solução Z do sistema é soma de Y com uma solução do sistema homogéneo associado.*

Tem-se portanto que a solução geral de sistema $AX = B$ é obtida pela soma de uma sua solução particular com a solução geral do sistema homogéneo associado.

Dem. Seja Y uma solução do sistema dado e U uma solução do sistema homogéneo. Então

$$A(Y + U) = AY + AU = AY + 0 = AY,$$

o que mostra que $Y + U$ também é solução de $AX = B$. Reciprocamente, se Z for solução de $AX = B$, consideremos $U = Z - Y$. Então, $Z = Y + U$ e

$$AU = A\,(Y - Z) = AY - AZ = B - B = 0,$$

o que mostra que Z é soma da solução particular do sistema Y com uma solução do sistema homogéneo associado.■

Consideremos novamente o sistema introduzido na secção anterior

$$\begin{cases}
a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + ... + a_{1n}.x_n = b_1 \\
a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + ... + a_{2n}.x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + a_{m3}.x_3 + ... + a_{mn}.x_n = b_m,
\end{cases}$$

e suponhamos que ele é possível. Como vimos, através da condensação da matriz ampliada, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + \ldots + 0.x_{1j} + c_{1(j+1)}.x_{(j+1)} + \ldots + c_{1n}.x_n & = & d_1 \\
x_2 + 0.x_3 + \ldots + 0.x_{2j} + c_{2(j+1)}.x_{(j+1)} + \ldots + c_{2n}.x_n & = & d_2 \\
x_3 + \ldots + 0.x_{3j} + c_{3(j+1)}.x_{(j+1)} + \ldots + c_{3n}.x_n & = & d_3 \\
\vdots & & \vdots \\
x_j + c_{j(j+1)}.x_{(j+1)} + \ldots + c_{jn}.x_n & = & d_j \\
0.x_n & = & 0 \\
\vdots & & \vdots \\
0.x_n & = & 0,
\end{array}$$

ainda equivalente a

$$\begin{array}{rcl}
x_1 & = & -c_{1(j+1)}.x_{j+1} - \ldots - c_{1n}.x_n + d_1 \\
x_2 & = & -c_{2(j+1)}.x_{j+1} - \ldots - c_{2n}.x_n + d_2 \\
x_3 & = & -c_{3(j+1)}.x_{j+1} - \ldots - c_{3n}.x_n + d_3 \\
\vdots & & \vdots \\
x_j & = & -c_{j(j+1)}.x_{j+1} - \ldots - c_{jn}.x_n + d_j,
\end{array}$$

o que mostra que as j primeiras variáveis vêm em função das restante $n-j$. Logo a solução geral do sistema será, representando em vector coluna,

$$\left\{ \begin{bmatrix} -c_{1(j+1)}.x_{j+1} - \ldots - c_{1n}.x_n + d_1 \\ -c_{2(j+1)}.x_{j+1} - \ldots - c_{2n}.x_n + d_2 \\ -c_{3(j+1)}.x_{j+1} - \ldots - c_{3n}.x_n + d_3 \\ \vdots \\ -c_{j(j+1)}.x_{j+1} - \ldots - c_{jn}.x_n + d_j \\ x_{j+1} \\ x_{j+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

A solução geral pode ser reescrita como soma de uma solução particular com a solução geral do sistema homogéneo associado. Não apresentaremos no caso geral mas ilustraremos esta afirmação com os seguintes casos práticos.

Exemplo 3 *Consideremos os três sistemas seguintes:*
1)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 4x_2 + 5x_3 = 23 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9 \end{array} \right.$$

Utilizando a condensação da matriz ampliada tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 4 & 5 & 23 \\ -1 & 2 & 2 & 9 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 4 & 5 & 23 \\ 0 & 4 & 5 & 23 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 4 & 5 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 5/4 & 23/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 5/4 & 23/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2.7}$$

donde, $r(A) = r(A|B) = 2 < 3 = n^o$ *incognitas. Daqui se conclui que o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação* 1*. De (2.7) obtemos o sistema equivalente ao inicial*

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{5}{2} \\ x_2 + \frac{5}{4}x_3 = \frac{23}{4} \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{5}{2} \\ x_2 = -\frac{5}{4}x_3 + \frac{23}{4} \end{cases} .$$

Logo, a solução geral do sistema dado é

$$\left(-\frac{1}{2}x_3 + \frac{5}{2}, -\frac{5}{4}x_3 + \frac{23}{4}, x_3\right)$$

isto é,

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{23}{4}, 0\right) + x_3\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, 1\right)$$

que corresponde exactamente á soma de uma solução particular do sistema $\left(\frac{5}{2}, \frac{23}{4}, 0\right)$ *com a solução geral do sistema homogéneo associado e que é* $\lambda\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, 1\right)$*,* $\lambda \in \mathbf{R}$*. Observe-se que a cada subsbituição do parâmetro* x_3 *obtém-se uma solução do sistema, e vice-versa. A existência de um único parâmetro a substituir está ligado ao facto de o grau de indeterminação ser* 1.

2) Dado o sistema

$$\begin{cases} x + y + z + 2w = 1 \\ 2x - y + z - w = -1 \\ -3y - z - 5w = -3 \\ 2x - 4y - 6w = -4 \end{cases}$$

tem-se por condensação da respectiva matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -5 & -3 \\ 2 & -4 & 0 & -6 & -4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & -6 & -2 & -10 & -6 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 5/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 5/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Logo $r(A) = r(A|B) = 2 < 4 = n^o$ *incógnitas, donde se conclui que o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação* 2*. Obtemos o sistema equivalente*

$$\begin{cases} x + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}w = 0 \\ y + \frac{1}{3}z + \frac{5}{3}w = 1 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}z - \frac{1}{3}w \\ y = 1 - \frac{1}{3}z - \frac{5}{3}w \end{cases}.$$

Logo, a solução geral do sistema dado é

$$\left\{\left(-\frac{2}{3}z - \frac{1}{3}w, 1 - \frac{1}{3}z - \frac{5}{3}w, z, w\right) : z, w \in \mathbf{R}\right\},$$

isto é,

$$\left\{(0,1,0,0) + z\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right) + w\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right) : z, w \in \mathbf{R}\right\}$$

que corresponde exactamente à soma de uma solução particular do sistema $(0,1,0,0)$ *com a solução geral do sistema homogéneo associado e que é* $\left\{\lambda_1\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right) + \lambda_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\right\}$*. Observe-se que a cada subsbituição dos parâmetros* λ_1 *e* λ_2*, obtém-se uma solução do sistema, e vice-versa. A existência de dois parâmetros resulta do facto de o grau de indeterminação ser* 2*.*

3) Como terceiro exemplo, seja

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 4x_2 + 5x_3 = 23 \\ 2x_1 + x_3 = 7 \end{cases}.$$

Então

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 14 \\ 0 & 4 & 5 & | & 23 \\ 2 & 0 & 1 & | & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 14 \\ 0 & 4 & 5 & | & 23 \\ 0 & -4 & -5 & | & -21 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 14 \\ 0 & 4 & 5 & | & 23 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

donde, $r(A) = 2 < r(A|B)$, *o que mostra que o sistema é impossível.*

2.4 Sistemas de Cramer

Chama-se **sistema de Cramer** a um sistema de n equações a n incógnitas, $x_1, x_2, ..., x_n$, cuja matriz simples tem caracterísitca n, ou seja, é invertível, ou ainda, tem determinante não nulo.

A sua solução pode ser dada pela **regra de Cramer** que diz o seguinte:

- O valor de cada incógnita x_j é dado pela fracção cujo denominador é o determinante da matriz simples A e o numerador é o determinante da matriz que resulta de se substituir na matriz simples a coluna dos coeficientes da variável x_i, pela coluna dos termos independentes, ou seja, pondo

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

tem-se

$$x_i = \frac{\Delta_i}{|A|},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Exemplo 4 *Consideremos o seguinte sistema*

$$\begin{cases} 2x - y + z = 12 \\ 4x + 5z = 6 \\ x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -31; \\
\Delta_x &= \begin{vmatrix} 12 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -189; \\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 2 & 12 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 108; \\
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 12 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 114
\end{aligned}$$

Portanto, pela regra de Cramer, teremos:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\Delta_x}{|A|} = \frac{-189}{-31} = \frac{189}{31} \\
y &= \frac{\Delta_y}{|A|} = \frac{108}{-31} = -\frac{108}{31} \\
z &= \frac{\Delta_z}{|A|} = \frac{114}{-31} = -\frac{114}{31}
\end{aligned}$$

Logo, o sistema tem como solução $\left(\frac{189}{31}, -\frac{108}{31}, -\frac{114}{31}\right)$.