Matemática I

1º semestre - 2012/13

Licenciatura em Economia

Exercícios

Análise Matemática

2 Números reais. Breves Noções topológicas

2.1. Demonstre pelo princípio de indução matemática:
a) $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo o natural $n \geq 1$,
b) Desigualdade de Bernoulli: Sendo $a > -1$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

c) Binómio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p, \qquad \forall_n \in \mathbb{N}, \qquad \forall_{a,b} \in \mathbb{R}.$$

Recorde que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, e que desta igualdade se tira imediatamente que

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$$

.

2.2. Considere as seguintes igualdades

$$1 = 1; \qquad 1-4 = -(1+2); \qquad 1-4+9 = 1+2+3; \qquad 1-4+9-16 = -(1+2+3+4).$$

Tire daqui uma lei e tente demonstrá-la por indução.

2.3. Interprete geometricamente os seguintes conjuntos:
a) $\{x : |x| < 1\}$,
b) $\{x : |x| < 0\}$,
c) $\{x : |x-a| < \epsilon\}$, onde $\epsilon > 0$
d) $\{x : |x| > 0\}$,
e) $\{x : (x-a)(x-b) < 0\}$, onde $a < b$

f) $\{x : x^3 > x\}$,
g) $\{x : |x-1| \geq |x|\}$.

2.4. Resolva as equações seguintes
a) $x+2 = \sqrt{4x+13}$
b) $|x+2| = \sqrt{4-x}$
c) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$

2.5. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A \subset B$ e suponha que A é não vazio e B é majorado. Justifique que existem os supremos de A e B e prove que se verifica $\sup A \leq \sup B$.

2.6. Mostre que
a) $|x+y| \leq |x| + |y|$,
b) $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

2.7. Resolva as inequações seguintes e indique o conjunto das soluções:

a) $\lvert 3-2x\rvert < 1$,	k) $\lvert 2-3x\rvert \leq 1$
b) $\lvert 1+2x\rvert \leq 1$	l) $\lvert x-3\rvert > 2$
c) $\lvert x-1\rvert > 2$	m) $\lvert 3-x^{-1}\rvert < 1$
d) $\lvert x+2\rvert \geq 5$	n) $\lvert x-4\rvert < \lvert x+2\rvert$
e) $\lvert 5-x^{-1}\rvert < 1$	o) $\lvert x^2-5\rvert \leq 2$
f) $\lvert x-5\rvert < \lvert x+1\rvert$	p) $x < x^2 - 12 < 4x$
g) $\lvert x^2-2\rvert < 1$	q) $\lvert 2x-1\rvert - x \geq 2$
h) $\lvert 2x-1\rvert = 5$	r) $\frac{x}{1+\lvert x\rvert} \leq 2$
i) $\lvert 5x-6\rvert + 3 = 10$	s) $x-2 \geq (\lvert x\rvert-1)^2$
j) $\lvert 2x-1\rvert = \lvert 4x+3\rvert$	t) $\left\lvert \frac{x^2-x}{1+x} \right\rvert > x$.

2.8. Determine em $\mathbb{R}$ o conjunto dos majorantes, dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo (caso existam) dos seguintes conjuntos:

a) $\{1, \sin 1, \sin 2\}$	e) $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : m, n \in \mathbb{N}\}$
b) $\{(-1)^n \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$	f) $\{n^{(-1)^m} : m, n \in \mathbb{N}\}$
c) $\{\frac{a^n}{n!} : n \in \mathbb{N}\}$ com $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lvert a\rvert < 2$	d) $\{m + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N}\}$

2.9. Determine o interior, o exterior, a fronteira, a aderência, o derivado, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo (caso existam) dos seguintes conjuntos:

a) $A = [2,3[\cup [4,10[$,	c) $C = [0,1] \backslash \mathbb{Q}$,
b) $B =]5,7[\cup \{15\}$,	d) $D = [2,3] \cap \mathbb{Q}$.

2.10. Determine o interior, o exterior, a fronteira, o derivado e a aderência dos seguintes conjuntos:
a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 49\}$,
b) $B = \{x : x \text{ é irracional e } x^2 < 49\}$.

2.11. Considere o conjunto

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

a) Determine o interior, o exterior, o derivado, a fronteira e a aderência de A.

b) Averigue se o conjunto A é aberto ou fechado.

2.12. Determine o exterior, o interior, a fronteira e o derivado do conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : |x+3| < 5\} \cup \left\{ x : x \text{ é irracional} \wedge -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{13} \right\}.$$

2.13. (Exame) São dados os conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{x^2}{x-2} \right| \leq 1 \right\}$$

e

$$B = \left\{ y \in \mathbb{R} : y = (-1)^n \left(2 + \frac{1}{n} \right) \wedge n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Determine:
a) $\operatorname{int}(A \cup B)$,
b) $(A \cup B)'$.

2.14. (Exame) Dados os conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \left| \frac{1}{x} + 1 \right| < \frac{1}{x^2} \right\}$$

e

$$B = \left\{ y \in \mathbb{R} : y = \frac{1+2n}{2^n} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$

a) Determine A sob a forma de intervalos de números reais.

b) Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo de $A \cap B$.

3 Sucessões numéricas

3.15. Calcule o limite de cada uma das seguintes sucessões:

a) $s_n = \dfrac{1}{n}$	c) $s_n = \dfrac{n}{n+1}$	e) $s_n = \dfrac{n^2}{n^4+1}$
b) $s_n = \dfrac{1}{n^2}$	d) $s_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$	f) $s_n = \frac{(-1)^n}{n}$

3.16. Sejam $(x_n) \in \mathbb{R}$ uma sucessão, $x_n \to \infty$, $P(x) = a_0 x_n^p + \ldots + a_{p-1} x_n + a_p$ e $Q(x) = b_0 x_n^q + \ldots + b_{q-1} x_n + b_q$ duas funções polinomiais de coeficientes reais, $p, q \in \mathbb{N}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Mostre que

a) $\lim P(x_n) = \lim a_0 x_n^p$.

b) $\lim \dfrac{P(x_n)}{Q(x_n)} = \lim \dfrac{a_0 x_n^p}{b_0 x_n^q} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} & \text{se } p = q, \\ \infty & \text{se } p > q, \\ 0 & \text{se } p < q. \end{cases}$

3.17. Calcule, se existir, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

a) $u_n = \dfrac{1-n}{4n+3}$

b) $u_n = \dfrac{n^2+2}{3n+1}$

c) $u_n = \dfrac{3n}{4n^3+1}$

d) $u_n = \dfrac{-n^3+2}{4n^3-7}$

e) $u_n = \dfrac{n^2+3n}{n+2} - \dfrac{n^2-1}{n}$

f) $u_n = \dfrac{2n+3}{3n-1}$

g) $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^4+3}$

h) $u_n = \dfrac{2^n+1}{2^{n+1}-1}$

i) $u_n = \dfrac{n^3+1}{n^2+2n-1}$

j) $u_n = \dfrac{(-1)^n n^3+1}{n^2+2}$

k) $u_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}$

3.18. Calcule os limites das seguintes sucessões:

a) $\cos^2(n)\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$,

b) $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$,

c) $(\cos(x))^n$, $x \in \mathbb{R}$,

d) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$,

e) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}$,

f) $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \ldots \dfrac{1}{(2n)^2}$,

g) $\dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+2}} \ldots + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}$,

h) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

3.19. Calcule os limites de cada uma das seguintes sucessões:

a) $u_n = \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{2n}$ b) $u_n = \left(\dfrac{n+5}{2n+1}\right)^n$ c) $u_n = \left(1 - \dfrac{3}{n^2}\right)^n$.

3.20. A sucessão $s = \{s_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ definida por $s_1 = 1$ e $s_n = \sqrt{s_{n-1}+1}$ é convergente. Explique porquê e calcule o seu limite.

4 Séries numéricas e de potências

4.21. Diga se são convergentes as séries seguintes. Em caso afirmativo, determine a sua soma.

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 3^n$ c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ e) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 5^n$

4.22. Determine para que valores de x convergem as séries e calcule a sua soma.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1-|x|^n)$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^{2n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\left(\frac{2}{x}\right)^{n+2}$ g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-|x|)^n}{n!}$

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n+6}}{(n+3)!}$ j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-2)^{n+3}}{n}$

4.23. Utilize a teoria das séries geométricas para calcular os racionais correspondentes às dízimas:

a) $3,666\ldots$

b) $1,571428571428571428\ldots$

c) $1,181818\ldots$

d) $0,999\ldots$

4.24. Calcule o raio de convergência e indique o maior aberto onde as seguintes séries de potências são absolutamente convergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+1)^{2n}}{3^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^{2n+1}}{\sqrt{n}}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!n^{-n}x^n$