Análise Matemática III

LISTA 7

(1) Dados $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $R > r > 0$, considere a 2-variedade de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - R\right)^2 + (z-z_0)^2 = r^2,\ z > z_0\right\}.$$

(a) Determine a normal unitária ν com terceira componente positiva em cada ponto de M.

(b) Calcule o fluxo de $X(x,y,z) = (0,1,1)$ segundo ν, i.e.

$$\int_M X \cdot \nu \, dv_2.$$

Sugestão: Use o teorema da divergência.

(c) Repita a alínea anterior para

$$X(x,y,z) = (x + \arctan(y^2 + z^3), e^{z-x^3}, z^2 - z + 1).$$

(2) Considere o campo vectorial $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x,y,z) = (xg(z), -yg(z), z),$$

onde $g \in C^1(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que o fluxo de f através do cilindro

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 4,\ 0 < z < 1\}$$

segundo uma normal à sua escolha, não depende de g.

(b) Mostre que f é um campo gradiente sse g é constante.

(3) *A partir do teorema da divergência, mostre o teorema de Green: Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular, e $P, Q \colon A \to \mathbb{R}$ de classe C^1 num aberto $A \supset \overline{D}$. Então,

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy.$$

Sugestão: Note que usámos a seguinte notação para o integral de linha de um campo vectorial

$$\int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy = \int_{\partial D} (P,Q) \cdot d\gamma$$

onde γ é um caminho que percorre ∂D no sentido anti-horário (directo). A notação faz sentido desde que se escreva $d\gamma = (dx, dy)$.