Matemática I

1º semestre - 2012/13

Licenciatura em Economia, Finanças e Gestão

Exercícios

Análise Matemática

5 Funções reais de variável real: domínios, limites e continuidade

5.1. Determine o domínio das seguintes funções:
a) $\sqrt{x+1}$
b) $\ln(1-x)$
c) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$
d) $\sqrt{9-x^2}$
e) $\sqrt{e^{x^2}-1}$
f) $\ln(x^2-16)$
g) $\sqrt{|x-2|-4}$
h) $\ln(\ln x)$
i) $\dfrac{1}{\ln(\ln x)-1}$
j) $\dfrac{2}{\sqrt{2-|x-1|}}$

5.2. Calcule, se existirem:
a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$
b) $\lim\limits_{x\to 0} \left[x\sin\dfrac{1}{x}\right]$
c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x\sin\dfrac{1}{x}\right]$
d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$

5.3. Calcule os seguintes limites:
a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2-3x+4$
b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+x-1}{x-3x^2+4}$
c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^3-5x+1}{2x^2-3x+5}$

d) $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x(x^2-1)}{x^2(2x+3)}$

e) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2+3x}{x^2+6x+9}$

f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^3-8}$

m) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{x-2}$

n) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

5.4. Considere a função real de variável real, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 2x + \arccos(x), & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{x+5}{3}, & \text{se } 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

a) Mostre que h é contínua em todo o seu domínio.
b) Aplicando o teorema de Bolzano, mostre que: $\exists c \in]2,4[\colon h(c) = c$.

5.5. Considere em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ a função $f(x) = \dfrac{1-e^{3x}}{5x}$. Qual o valor a atribuir no ponto $x = 0$ de modo que o prolongamento de f a $\mathbb{R}$ seja contínuo.

5.6. Considere a função real $f(x) = 1 - x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ definida em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Seja g um prolongamento de f a $\mathbb{R}$. Determine o valor a atribuir a $g(0)$ de modo que g seja contínua em $x = 0$.

5.7. Determine o valor de a e b que tornam contínuas as seguintes funções nos pontos indicados.

a) $f_1(x) = \begin{cases} 3x-7, & \text{se } x \geq 3 \\ ax+3, & \text{se } x < 3 \end{cases}, \qquad x = 3.$

b) $f_2(x) = \begin{cases} x+a, & \text{se } x < -2 \\ 3ax+b, & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ ax+3, & \text{se } x > 1 \end{cases}, \qquad x = -2,\ x = 1.$

c) $f_3(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{se } x \leq 0 \\ ax+b, & \text{se } x > 0 \end{cases}, \qquad x = 0$

5.8. Seja f uma função contínua de $[a,b]$ em $[a,b]$. Mostre que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.

5.9. Mostre que todo o polinómio de grau ímpar se anula pelo menos num ponto.