

Matemática I

1º semestre - 2012/13

Licenciatura em Economia

Exercícios

Análise Matemática

6 Cálculo diferencial em R

6.1. Derive as seguintes funções:

1) $f(x) = x^2$

2) $f(x) = 2x + 2$

3) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

4) $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$

5) $f(x) = c$

6) $f(x) = 2x^2 + 4$

7) $f(x) = 2x^5 + 8x^2 + x - 78$

8) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 3x^{\frac{1}{3}}$

9) $f(x) = \frac{3}{x^4} - \sqrt[4]{x} + x$

10) $f(x) = 6x^{1/3} - x^{0.4} + \frac{9}{x^2}$

11) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{x}$

12) $f(x) = (x^4 + 4x + 2)(2x + 3)$

13) $f(x) = (2x - 1)(3x^2 + 2)$

14) $f(x) = (x^3 - 12x)(3x^2 + 2x)$

15) $f(x) = (2x^5 - x)(3x + 1)$

16) $f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$

17) $f(x) = \frac{3x^4+2x+2}{3x^2+1}$

18) $f(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}+1}{x+2}$

19) $f(x) = \frac{x^3+2}{x^3}$

20) $f(x) = \frac{x^2+x}{2x-1}$

- 21) $f(x) = \frac{16x^4+2x^2}{x}$
- 22) $f(x) = (x + 5)^2$
- 23) $g(x) = (x^3 - 2x + 5)^2$
- 24) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
- 25) $f(x) = \frac{(2x+4)^3}{4x^3+1}$
- 26) $f(x) = (2x + 1)\sqrt{2x + 2}$
- 27) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{2x+2}}$
- 28) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}(3x^4 + 2x)^2$
- 29) $f(x) = \frac{2x+3}{(x^4+4x+2)^2}$
- 30) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}(x^2 - 1)$
- 31) $f(x) = ((2x + 3)^4 + 4(2x + 3) + 2)^2$
- 32) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$
- 33) $f(x) = (3x^2 + e)e^{2x}$
- 34) $f(x) = e^{2x^2+3x}$
- 35) $f(x) = e^{e^{2x^2}+1}$
- 36) $f(x) = 2^{x-3}\sqrt{x^3 - 2} + \ln x$
- 37) $f(x) = \ln x - 2e^x + \sqrt{x}$
- 38) $f(x) = \ln(\ln(x^3(x + 1)))$
- 39) $f(x) = \ln(2x^2 + 3x)$
- 40) $f(x) = \ln^4 x + \ln x^4 + 4 \ln x$
- 41) $f(x) = \ln(\sin x)$
- 42) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$
- 43) $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}$
- 44) $f(x) = x^2 \ln x$
- 45) $f(x) = 3e^x - 4 \cos(x) - \frac{1}{4} \ln x$
- 46) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$
- 47) $f(x) = \arcsin \frac{x}{2}$
- 48) $f(x) = \arccos(2x^2)$
- 49) $f(x) = \sin(2x) - \sin^2 x + 2 \sin x$
- 50) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
- 51) $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$
- 52) $f(x) = e^{ax} \sin(ax)$

6.2. Calcule:

a) $\frac{d}{dx} e^{x^2}$

b) $\frac{d}{dx} e^{2^x}$

c) $\frac{d}{dx} \arctan(x^4)$

d) $\frac{d}{dx} \arctan(2x + 4)$

e) $\frac{d}{dx} \ln(x^4)$

f) $\frac{d}{dx} \ln(2x + 4)$

g) $\frac{d}{dx} \frac{1}{1+x^4}$

h) $\frac{d}{dx} \frac{1}{2x+4}$

i) $\frac{d}{dx} \arctan e^x$

6.3. Considere as funções e os pontos seguintes:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 5, \quad (3, 23)$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad (1, -1)$$

$$f(x) = (x^2 + 1)(2 - x), \quad (2, 0)$$

(a) Determine para que valores de x a recta tangente à função f é horizontal.

(b) Escreva a equação da recta tangente a f no ponto dado.

6.4. Verifique se o teorema de Rolle é aplicável às funções seguintes

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ no intervalo $[1, 2]$

b) $f(x) = |x - 1|$ no intervalo $[0, 2]$.

6.5. Sejam f e g duas funções deriváveis em $[a, b]$ tais que $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$. Mostre que existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = g'(c)$.

6.6. Usando o teorema do valor médio de Lagrange, prove as desigualdades seguintes

a) $e^x \geq 1 + x$

b) $\ln(1 + x) < \sqrt{x}$ se $x > 0$.

6.7. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x)}{x^{3/2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + \sqrt{x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sin 1/x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6}$.

6.8. Escreva os desenvolvimentos em série de Taylor das funções seguintes:

a) $f(x) = \sin x$, em torno do ponto 0

b) $f(x) = \cos x$, em torno do ponto 0

c) $f(x) = e^x$, em torno do ponto 0

d) $f(x) = \ln x$, em torno do ponto 1.

6.9. Estude as funções seguintes (domínio, assíntotas, intervalos de monotonia, extremos relativos, concavidades) e esboce os gráficos respectivos

a) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

d) $f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}}$

e) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

f) $f(x) = e^{\frac{-1}{x}}$

g) $f(x) = e^{-x^2}$

h) $f(x) = x^2 \ln x$