Resolução - Teste de auto-avaliação 1

1. a) A matriz B é a matriz inversa de C se verifica $BC = CB = I$, onde I representa a matriz identidade de ordem 3. Como,

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & b \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6}(-8+2b) \\ 0 & 1 & \frac{1}{6}(12-3b) \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}(-10+4b) \end{bmatrix},$$

torna-se necessário resolver a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6}(-8+2b) \\ 0 & 1 & \frac{1}{6}(12-3b) \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}(-10+4b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de onde se tira que $b = 4$. Utilize-se agora este resultado e verifique-se que $CB = I$.

b)

$$C \times (B + I) = CB + C$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6(-4+b) & 1/6(-10+4b) & 1/6(-4+b) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & b \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -2 + 1/6(-4+b) & 2 + 1/6(-10+4b) & 1/6(-4+b) + b \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

O determinante pode ser obtido pela regra de Sarrus, e obtem-se $det(C \times (B + I)) = -(190/3) + (76b)/3$. Assim sendo temos que $det(C \times (B + I)) = 8$ quando $b = 107/38$.

2. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ ser invertível, o seu determinante deverá ser não nulo. Assim:

$$\det A \neq 0 \iff \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \neq 0 \iff$$

$$\begin{aligned}
&\iff [(4 \times a \times 2) + ((-2) \times 1 \times 1) + (0 \times 5 \times 0)] - \\
&\quad - [((-2) \times a \times 0) + (5 \times 1 \times 4) + (0 \times 1 \times 2)] \neq 0 \iff \\
&\iff (8a - 2 + 0) - (0 + 20 + 0) \neq 0 \iff \\
&\iff 8a - 2 - 20 \neq 0 \iff \\
&\iff 8a \neq 22 \iff \\
&\iff a \neq \tfrac{22}{8} \iff \\
&\iff a \neq \tfrac{11}{4}
\end{aligned}$$

3. a) Se A e B são inversas então AB=I

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -6 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/21 & -1/6 & -1/14 \\ -3/28 & \beta & 1/7 \\ -5/14 & 0 & 1/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4\beta & 0 \\ 0 & 1-2\beta & 0 \\ 0 & 10\beta & 1 \end{bmatrix}$$

R: $\beta = 0$

b)

$$AXC^{-1} = A + I \Leftrightarrow BAXC^{-1} = B(A+I) \Leftrightarrow XC^{-1} = I + B \Leftrightarrow XC^{-1}C = (I+B)C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = (I+B)C$$

$$(I+B)C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/21 & -1/6 & -1/14 \\ -3/28 & 0 & 1/7 \\ -5/14 & 0 & 1/7 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 23/21 & -1/6 & -1/14 \\ -3/28 & 1 & 1/7 \\ -5/14 & 0 & 8/7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & -14/3 & -1 \\ -9/4 & 28 & 2 \\ -15/2 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

4. $$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & a \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & a & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12+3a & 4 & -4 \\ 0 & -6 & -2 & -1 \\ 8 & 30+4a & 10 & -3 \end{bmatrix}$$

logo $12 + 3a = 24 \wedge 30 + 4a = 46 \Leftrightarrow a = 4$

5. a)

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 10 \\ 2x - 7y - 2z = 10 \\ x + 5y + \alpha z = \beta \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 2 & -7 & -2 & 10 \\ 1 & 5 & \alpha & \beta \end{array}\right] \underset{\substack{l_2 - 2l_1 \\ l_3 - l_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & -15 & -8 & -10 \\ 0 & 1 & \alpha - 3 & \beta - 10 \end{array}\right] \underset{l_3 + \frac{1}{15}l_2}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & -15 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & \alpha - \frac{53}{15} & \beta - \frac{32}{3} \end{array}\right]$$

$$\alpha \neq \frac{53}{15}, \forall \beta \in \mathbb{R} \implies r(A) = r(Ab) = 3 = n \implies \textbf{SPD}$$

$$\alpha = \frac{53}{15} \wedge \beta = \frac{32}{3} \implies r(A) = r(Ab) = 2 < n \implies \textbf{SPI} \text{ (grau indet.}= 1)$$

$$\alpha = \frac{53}{15} \wedge \beta \neq \frac{32}{3} \implies r(A) = 2 < r(Ab) = 3 \implies \textbf{SI}$$

b)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 2 \\ \alpha y + 3t = 1 \\ 5y + z - t = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 2 \\ 0 & \alpha & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \underset{l_2 \leftrightarrow l_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & \alpha & 0 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \underset{l_3 - \frac{\alpha}{5} l_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{5} & 3 + \frac{\alpha}{5} & | & 1 - \frac{2}{5}\alpha \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 0 \wedge \alpha = -15 \wedge \alpha \neq \frac{5}{2} \implies r(A) = 2 < r(Ab) = 3 \implies \textbf{SI}$$

Como α não pode simultaneamente ser igual a 0 e a -15, então o sistema é possível $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$$r(A) = r(Ab) < n, \forall \alpha \in \mathbb{R} \implies \textbf{SPI} \text{ (grau indet.}=1)$$

Nota 1: O sistema anterior não pode ser SPD porque existem mais variáveis do que equações.
Nota 2: **SPD** =Sistema Possível Determinado; **SPI** =Sistema Possível Indeterminado; **SI** =Sistema Impossível.