

MATEMÁTICA I

Licenciatura em Economia, Finanças e Gestão

2012-13 Teste de auto-avaliação (3) - Soluções

1.

(a)

$$x \in [3, +\infty[$$

(b)

$$x \in]-\infty, -10[\cup]-10, -9] \cup [9, +\infty[$$

(c)

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2.

(a)

$$\sin^3\left(\frac{1}{2}\right) \arctan(0) = 0$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sqrt{\sin^2(x+1)}}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \sin(x-1)}{(x-1)^2} \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y+1}{y} \frac{\sin y}{y} = +\infty \times 1 = +\infty$$

3.

(a)

$$D_d = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}} = -\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \sqrt{2}$$

$$D_c = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

(b)

$$D_d = D_c = \mathbb{R}$$

(c)

$$D_d = D_c = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

4.

(a)

Considere-se o polinómio $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ com $a_0 \neq 0$ e n ímpar. Suponhamos, sem perda de generalidade que $a_0 > 0$. Assim sendo, temos que:

- $p(x)$ é uma função contínua em \mathbb{R} ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$;

Conclui-se, pelo teorema do valor intermédio, que existe pelo menos um $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.
(b)

Definindo $f(x) = x^8 + 3x^4 - 1$, note-se que f é contínua em \mathbb{R} , $f(0) = -1 < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e portanto, pelo teorema do valor intermédio, existe pelo menos uma raiz real em $] -\infty, 0[$ e pelo menos outra raiz real em $]0, +\infty[$.

5.

(a)

$p = \ln(2)$ e $m \in \mathbb{R}$.

(b)

Considere-se a função auxiliar $h(x) = f(x) - g(x)$, contínua no seu domínio. Além disso

- $h(0) < 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) > 0$;

Assim sendo, o teorema do valor intermédio, garante que existe um $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $h(c) = 0$, o que garante o pretendido.