Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

MATEMÁTICA I

Época Normal - 9 de Janeiro de 2013 - Duração: 2 horas

Grupo I - versão (1)

Escolha múltipla. **Cotações:** cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota**: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -6 & -2 & -1 \\ 0 & \beta & -3 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é invertível se e só se

(A) $\beta \neq 4$ **(B)** $\beta = 3$ **(C)** $\beta \neq 3$ **(D)** $\beta = 4$

2. Sendo $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x-1|-2}}{e^{x+2}-1}$, o domínio da função f e a sua fronteira são, respectivamente:

(A) $D_f = (]-\infty,-1] \setminus \{-2\}) \cup [3,+\infty[$ e $fr(D_f) = \{-2,-1,3\}$

(B) $D_f = (]-\infty,-1[\setminus\{-2\}) \cup]3,+\infty[$ e $fr(D_f) = \{-2,-1,3\}$

(C) $D_f =]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$ e $fr(D_f) = \{-1,3\}$

(D) $D_f =]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$ e $fr(D_f) = \{-1,3\}$

3. A série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty}(3x+1)^n$

(A) é absolutamente convergente em $]-1,1[$ e a sua soma é $-1-\frac{1}{3x}$

(B) é absolutamente convergente em $]-\frac{1}{3},0[$ e a sua soma é $-\frac{1}{3x}$

(C) é absolutamente convergente em $]-\frac{2}{3},\frac{2}{3}[$ e a sua soma é $\frac{1}{3x}$

(D) é absolutamente convergente em $]-\frac{2}{3},0[$ e a sua soma é $-1-\frac{1}{3x}$.

4. Considere as funções $f(x) = \dfrac{\sin^6(x)}{\cos(2x)}$ e $g(x) = \sqrt{\arctan(1+x)}$. Então:

(A) $f'(x) = \dfrac{6\sin^5(x)\cos(2x) - 2\sin(2x)\sin^6(x)}{\cos^2(2x)}$ e $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\arctan(1+x)}[1+(1+x)^2]}$

(B) $f'(x) = \dfrac{6\sin^5(x)\cos(x)\cos(2x) - 2\sin(2x)\sin^6(x)}{\cos^2(2x)}$ e $g'(x) = \frac{1+(1+x)^2}{2\sqrt{\arctan(1+x)}}$

(C) $f'(x) = \dfrac{6\sin^5(x)\cos(x)\cos(2x) + 2\sin(2x)\sin^6(x)}{\cos^2(2x)}$ e $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\arctan(1+x)}[1+(1+x)^2]}$

(D) $f'(x) = \dfrac{6\sin^5(x)\cos(2x) - 2\sin(2x)\sin^6(x)}{\cos^2(2x)}$ e $g'(x) = \frac{1+(1+x)^2}{2\sqrt{\arctan(1+x)}}$.

5. O valor do integral $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^7}{e^{x^8}}\, dx$ é:

(A) $-\frac{1}{8}$ **B** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{1}{8e}$ **(D)** $-\frac{7}{8e}$.

Grupo I - v.2

Escolha múltipla. **Cotações:** cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota**: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -6 & -2 & -1 \\ 0 & \beta & 3 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é invertível se e só se

(A) $\beta \neq -3$ **(B)** $\beta = -3$ **(C)** $\beta \neq 3$ **(D)** $\beta = 3$

2. Sendo $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x-1|-2}}{e^{x-4}-1}$, o domínio da função f e a sua fronteira são, respectivamente:

(A) $D_f =]-\infty, -1] \cup ([3, +\infty[)$ e $fr(D_f) = \{-1, 3\}$

(B) $D_f =]-\infty, -1] \cup ([3, +\infty[\setminus\{4\})$ e $fr(D_f) = \{-1, 3, 4\}$

(C) $D_f =]-\infty, -1[\cup(]3, +\infty[\setminus\{4\})$ e $fr(D_f) = \{-1, 3, 4\}$

(D) $D_f =]-\infty, -1] \cup ([3, +\infty[)$ e $fr(D_f) = \{-1, 3\}$

3. A série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty}(3x+1)^n$

(A) é absolutamente convergente em $]-\frac{2}{3}, 0[$ e a sua soma é $-1-\frac{1}{3x}$

(B) é absolutamente convergente em $]-\frac{1}{3}, 0[$ e a sua soma é $-\frac{1}{3x}$

(C) é absolutamente convergente em $]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$ e a sua soma é $\frac{1}{3x}$

(D) é absolutamente convergente em $]-1, 1[$ e a sua soma é $-1-\frac{1}{3x}$.

4. Considere as funções $f(x) = \dfrac{\sin^6(x)}{\cos(4x)}$ e $g(x) = \sqrt{\arctan(1+x)}$. Então:

(A) $f'(x) = \dfrac{6\sin^5(x)\cos(4x) - 4\sin(2x)\sin^6(x)}{\cos^2(4x)}$ e $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\arctan(1+x)}[1+(1+x)^2]}$

(B) $f'(x) = \dfrac{6\sin^5(x)\cos(x)\cos(4x) + 4\sin(4x)\sin^6(x)}{\cos^2(4x)}$ e $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\arctan(1+x)}[1+(1+x)^2]}$

(C) $f'(x) = \dfrac{6\sin^5(x)\cos(x)\cos(4x) + 4\sin(4x)\sin^6(x)}{\cos^2(4x)}$ e $g'(x) = \frac{1+(1+x)^2}{2\sqrt{\arctan(1+x)}}$

(D) $f'(x) = \dfrac{6\sin^5(x)\cos(4x) - 4\sin(4x)\sin^6(x)}{\cos^2(4x)}$ e $g'(x) = \frac{1+(1+x)^2}{2\sqrt{\arctan(1+x)}}$.

5. O valor do integral $\int_0^{+\infty} \dfrac{4x^7}{e^{x^8}}\, dx$ é:

(A) $-\frac{7}{4}$ **B** $-\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{2}$.

Grupo I - v.3

Escolha múltipla. **Cotações:** cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota**: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -6 & -2 & -1 \\ 0 & 2\beta & 16 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é invertível se e só se

(A) $\beta \neq -16$ **(B)** $\beta = -16$ **(C)** $\beta = -8$ **(D)** $\beta \neq -8$

2. Sendo $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x-1|-2}}{e^{2x+6}-1}$, o domínio da função f e a sua fronteira são, respectivamente:

(A) $D_f = (]-\infty,-1[\setminus\{-3\}) \cup]3,+\infty[$ e $fr(D_f) = \{-3,-1,3\}$

(B) $D_f =]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$ e $fr(D_f) = \{-1,3\}$

(C) $D_f = (]-\infty,-1] \setminus \{-3\}) \cup [3,+\infty[$ e $fr(D_f) = \{-3,-1,3\}$

(D) $D_f =]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$ e $fr(D_f) = \{-1,3\}$

3. A série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty}(3x+1)^n$

(A) é absolutamente convergente em $]-\frac{1}{3},0[$ e a sua soma é $-\frac{1}{3x}$

(B) é absolutamente convergente em $]-\frac{2}{3},0[$ e a sua soma é $-1-\frac{1}{3x}$

(C) é absolutamente convergente em $]-\frac{2}{3},\frac{2}{3}[$ e a sua soma é $\frac{1}{3x}$

(D) é absolutamente convergente em $]-1,1[$ e a sua soma é $-1-\frac{1}{3x}$.

4. Considere as funções $f(x) = \dfrac{\sin^5(x)}{\cos(2x)}$ e $g(x) = \sqrt{\arctan(1+x)}$. Então:

(A) $f'(x) = \dfrac{5\sin^4(x)\cos(x)\cos(2x) + 2\sin(2x)\sin^5(x)}{\cos^2(2x)}$ e $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\arctan(1+x)}[1+(1+x)^2]}$

(B) $f'(x) = \dfrac{5\sin^4(x)\cos(2x) - 2\sin(2x)\sin^5(x)}{\cos^2(2x)}$ e $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\arctan(1+x)}[1+(1+x)^2]}$

(C) $f'(x) = \dfrac{5\sin^4(x)\cos(x)\cos(2x) - 2\sin(2x)\sin^5(x)}{\cos^2(2x)}$ e $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\arctan(1+x)}[1+(1+x)^2]}$

(D) $f'(x) = \dfrac{5\sin^4(x)\cos(x)\cos(2x) + 2\sin(2x)\sin^5(x)}{\cos^2(2x)}$ e $g'(x) = \dfrac{1+(1+x)^2}{2\sqrt{\arctan(1+x)}}$

5. O valor do integral $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^6}{e^{x^7}}\,dx$ é:

(A) $\frac{1}{7}$ **B** $-\frac{1}{7}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $-\frac{1}{6}$.

Grupo I - v.4

Escolha múltipla. **Cotações:** cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota**: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -6 & -2 & -1 \\ 0 & 4\beta & 16 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é invertível se e só se

(A) $\beta = -4$ **(B)** $\beta \neq -4$ **(C)** $\beta = -16$ **(D)** $\beta \neq -16$

2. Sendo $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x-2|-2}}{e^{x+2}-1}$, o domínio da função f e a sua fronteira são, respectivamente:

(A) $D_f = (]-\infty, 0[\setminus\{-2\}) \cup]4, +\infty[$ e $fr(D_f) = \{-2, 0, 4\}$

(B) $D_f =]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$ e $fr(D_f) = \{0, 4\}$

(C) $D_f =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ e $fr(D_f) = \{0, 4\}$

(D) $D_f = (]-\infty, 0] \setminus \{-2\}) \cup [4, +\infty[$ e $fr(D_f) = \{-2, 0, 4\}$

3. A série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} (3x+1)^n$

(A) é absolutamente convergente em $]-\frac{1}{3}, 0[$ e a sua soma é $-\frac{1}{3x}$

(B) é absolutamente convergente em $]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$ e a sua soma é $\frac{1}{3x}$

(C) é absolutamente convergente em $]-\frac{2}{3}, 0[$ e a sua soma é $-1-\frac{1}{3x}$

(D) é absolutamente convergente em $]-1, 1[$ e a sua soma é $-1-\frac{1}{3x}$.

4. Considere as funções $f(x) = \dfrac{\sin^6(x)}{\cos(6x)}$ e $g(x) = \sqrt{\arctan(1+x)}$. Então:

(A) $f'(x) = \dfrac{6\sin^5(x)\cos(x)\cos(6x) - 6\sin(6x)\sin^6(x)}{\cos^2(6x)}$ e $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\arctan(1+x)}[1+(1+x)^2]}$

(B) $f'(x) = \dfrac{6\sin^5(x)\cos(x)\cos(6x) + 6\sin(6x)\sin^6(x)}{\cos^2(6x)}$ e $g'(x) = \dfrac{1+(1+x)^2}{2\sqrt{\arctan(1+x)}[1+(1+x)^2]}$

(C) $f'(x) = \dfrac{6\sin^5(x)\cos(x)\cos(6x) + 6\sin(2x)\sin^6(x)}{\cos^2(6x)}$ e $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\arctan(1+x)}}$

(D) $f'(x) = \dfrac{6\sin^5(x)\cos(x)\cos(6x) + 6\sin(6x)\sin^6(x)}{\cos^2(6x)}$ e $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\arctan(1+x)}[1+(1+x)^2]}$

5. O valor do integral $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^8}{e^{x^9}}\,dx$ é:

(A) $\frac{1}{8}$ **B** $-\frac{1}{9}$ **(C)** $\frac{1}{9}$ **(D)** $-\frac{1}{8}$.

Grupo II

(Cotação: 7.5 (=0.5+2+2+2+1); 3.0; 2.0)

Apresente os cálculos que efectuar e justifique cuidadosamente a resolução das questões seguintes.

1. Estude a função $f(x) = \dfrac{2e^{x-1}}{x-1}$ respondendo às alíneas seguintes:

(a) domínio D_f;

(b) assíntotas e limites nos pontos fronteiros de D_f;

(c) intervalos de monotonia e máximos e mínimos relativos, se existirem;

(d) concavidades e pontos de inflexão;

(e) esboço do gráfico.

2. Calcule a primitiva da função $f(x) = (4x+4)e^{2x}$ que passa pelo ponto $(1, 5e^2)$.

3. Prove que

$$\int_0^{\arctan x} e^{t^2}\, dt < 100x, \qquad \text{se} \quad x > 0.$$

(Sugestão: use o teorema do valor médio de Lagrange)