Grupo 2

Estude a função $f(x)=\dfrac{2e^{x-1}}{x-1}$ respondendo às seguintes alíneas:

1.a) Domínio D_f.

$$D_f=\{x\in R:\ x\neq 1\}$$

b) Assíntotas e limites nos pontos fronteiros de D_f.

Assíntotas verticais:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2e^{x-1}}{x-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2e^{x-1}}{x-1}=+\infty\end{cases}\Rightarrow \text{ a recta de equação } x=1 \text{ é uma assíntota vertical.}$$

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x-1}}{x-1}=+\infty$$

$$\begin{cases}m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^{x-1}}{x(x-1)}=0\\ b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^{x-1}}{x-1}=0\end{cases}$$

Concluímos que a recta de equação $y=0$ é assíntota.

c) Intervalos de monotonia e máximos e mínimos relativos, se existirem.

$$f'(x)=\frac{2e^{x-1}(x-1)-2e^{x-1}}{(x-1)^2}=\frac{2e^{x-1}(x-2)}{(x-1)^2}$$

O(s) ponto(s) críticos (estacionariedade) de f são as soluções da equação $f'(x)=0$ ou seja

$$\frac{2e^{x-1}(x-2)}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow x=2 \text{ , pois } e^{x-1}>0,\ \forall x\in \mathrm{R}\,.$$

Concluímos que f tem um único ponto crítico $c=2$ e $f(2)=2e$.

No intervalo $]-\infty,\ 1[$, $f'(x)<0$, logo f é decrescente; no intervalo $]1,\ 2[$, $f'(x)<0$, pelo que f também é decrescente; no intervalo $]2,\ +\infty[$, $f'(x)>0$, pelo que f é crescente. $f(2)=2e$ é um mínimo relativo de *f*.

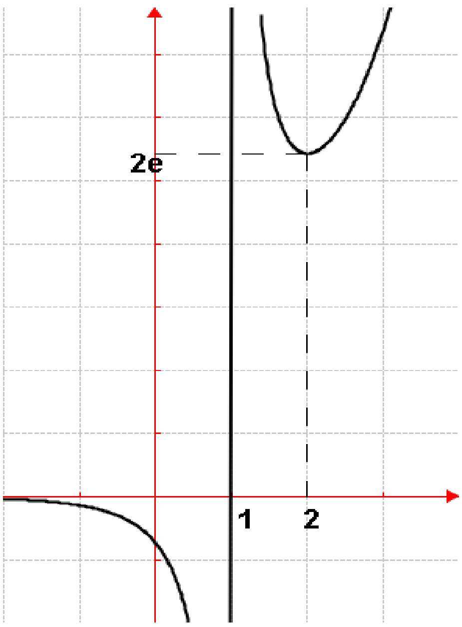
d) Concavidades e pontos de inflexão.

$$f''(x) = \frac{\left(2e^{x-1}(x-2)+2e^{x-1}\right)(x-1)^2 - 2e^{x-1}(x-2)2(x-1)}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{2e^{x-1}(x-1)^3 - 4e^{x-1}(x-2)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2e^{x-1}(x-1)^2 - 4e^{x-1}(x-2)}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{2e^{x-1}\left(x^2-4x+5\right)}{(x-1)^3}$$

$f''(x)$ não se anula em D_f, já que a equação $x^2-4x+5=0$ não admite raízes reais.

No intervalo $\left]-\infty, 1\right[$, $f''(x)<0$, pelo que f é côncava; no intervalo $\left]1, +\infty\right[$, $f''(x)>0$, pelo que f é convexa.

e) Esboço do gráfico.



2. Temos que

$$\int (4x+4)e^{2x}dx = 4\int xe^{2x}dx + 4\int e^{2x}dx.$$

Primitivando, temos:

$$F(x) = 4\underbrace{\int xe^{2x}dx}_{\text{primitivação por partes}} + 4\int e^{2x}dx = 4\left[x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx\right] + 4\int e^{2x}dx =$$
$$= 2xe^{2x} - e^{2x} + 2e^{2x} = 2xe^{2x} + e^{2x} + c$$
$$= (2x+1)e^{2x} + c.$$

Como

$$F(1)=5e^2 \Leftrightarrow 3e^2+c=5e^2 \Leftrightarrow c=2e^2$$

e portanto:

$$F(x)=\left(2x+1\right)e^{2x}+2e^2.$$

3. Seja $f(x)=\int_0^{\arctan x} e^{t^2}\,dt$.

Como, em **R**, $g(x)=e^{x^2}$ é uma função contínua e $h(x)=\arctan x$ é uma função diferenciável, a função $f(x)=\int_0^{\arctan x} e^{t^2}\,dt$ é diferenciável e, portanto, também é contínua em **R**.

Assim, pelo teorema de Lagrange aplicado a função f no intervalo $\left[0,\ x\right]$, $x>0$, existe $c\in\left]0,\ x\right[$ tal que

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c),$$

isto é,

$$\frac{\int_0^{\arctan x} e^{t^2}\,dt}{x}=\frac{e^{(\arctan c)^2}}{1+c^2}.$$

Como $\left|\arctan c\right|<\frac{\pi}{2}$, então

$$\frac{e^{(\arctan c)^2}}{1+c^2}<\frac{e^{\frac{\pi^2}{4}}}{1+c^2}<e^{\frac{\pi^2}{4}}<e^{\frac{4^2}{4}}<3^4<100,$$

o que implica

$$\frac{\int_0^{\arctan x} e^{t^2}\,dt}{x}<100,\ \forall x>0,$$

o que é equivalente a

$$\int_0^{\arctan x} e^{t^2}\,dt<100x,\ \forall x>0.$$