Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

MATEMÁTICA I

Época de Recurso - 28 de Janeiro de 2013 - Duração: 2 horas

Grupo I - v.1

Escolha múltipla. **Cotações:** cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota**: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Assinale a resposta certa pondo X sobre a alínea respectiva.

1. Considere o sistema linear

$$A = \begin{cases} \alpha x + 4y + 2z = 13 \\ 6x + y + 2z = 10 \\ 3x + 2y + z = \beta \end{cases}$$

Então

(A) O sistema é impossível se $\alpha = 6$ e $\beta \neq 13/2$

(B) O sistema é impossível se $\alpha = 6$ e $\beta = 13/2$

(C) O sistema é possível e indeterminado se $\alpha \neq 6$ e β for um real arbitrário

(D) O sistema é possível e indeterminado qualquer que seja $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta = 26$.

2. Sendo $f(x) = \dfrac{\ln(100 - |2x-2|)}{\ln(x+2) - 1}$, e notando como D_f o domínio da função f, tem-se:

(A) $D_f =]0, 100[\setminus \{e-2\}$ e D_f não é aberto nem fechado

(B) $D_f =]-2, 51[\setminus \{2\}$ e D_f é aberto

(C) $D_f =]-2, 51[\setminus \{e-2\}$ e D_f é aberto

(D) $D_f = [-2, 51] \setminus \{2\}$ e D_f é fechado.

3. A série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} + (x-4)^n$

(A) é absolutamente convergente em $]3, 5[$ e a sua soma é $e^{2x} + \dfrac{1}{5-x}$

(B) é absolutamente convergente em $\mathbf{R}$ e a sua soma é $e^{2x} + \dfrac{1}{5-x}$

(C) é absolutamente convergente em $]3, 5[$ e a sua soma é $e^{2x} + \dfrac{1}{x-4}$

(D) é absolutamente convergente em $\mathbf{R}$ e a sua soma é $e^{2x} + \dfrac{1}{x-4}$.

4. A função

$$\pi(x) = \begin{cases} x^3 + 3x - 10, & \text{se} \quad x \leq 3, \\ \dfrac{(x-3)^2}{\ln(x-2)} + 26, & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

(A) é descontínua no ponto $x = 3$

(B) tem derivada igual a 30 no ponto $x = 3$

(C) não é diferenciável em $x = 3$

(D) tem derivada igual a 0 em $x = 3$.

5. O valor do integral $\int_0^1 \frac{2}{x} \times \frac{1}{1+(\ln x)^2} dx$ é:

(A) 1

(B) 0

(C) $-\infty$

(D) π.

Grupo I - v.2

Escolha múltipla. **Cotações:** cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota**: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Assinale a resposta certa pondo X sobre a alínea respectiva.

1. Considere o sistema linear

$$A = \begin{cases} \alpha x + 4y + 2z = 13 \\ 6x + y + 2z = 10 \\ 3x + 2y + z = \beta \end{cases}$$

Então

(A) O sistema é impossível se $\alpha = 6$ e $\beta = 13/2$

(B) O sistema é impossível se $\alpha = 6$ e $\beta \neq 13/2$

(C) O sistema é possível e indeterminado se $\alpha \neq 6$ e β for um real arbitrário

(D) O sistema é possível e indeterminado qualquer que seja $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta = 26$.

2. Sendo $f(x) = \dfrac{\ln(100 - |2x-2|)}{\ln(x+2) - 1}$, e notando como D_f o domínio da função f, tem-se:

(A) $D_f =]-2, 51[\backslash \{e-2\}$ e D_f é aberto

(B) $D_f =]-2, 51[\backslash \{2\}$ e D_f é aberto

(C) $D_f =]0, 100[\backslash \{e-2\}$ e D_f não é aberto nem fechado

(D) $D_f = [-2, 51] \setminus \{2\}$ e D_f é fechado.

3. A série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} + (x-4)^n$

(A) é absolutamente convergente em $\mathbf{R}$ e a sua soma é $e^{2x} + \dfrac{1}{5-x}$

(B) é absolutamente convergente em $]3, 5[$ e a sua soma é $e^{2x} + \dfrac{1}{5-x}$

(C) é absolutamente convergente em $]3, 5[$ e a sua soma é $e^{2x} + \dfrac{1}{x-4}$

(D) é absolutamente convergente em $\mathbf{R}$ e a sua soma é $e^{2x} + \dfrac{1}{x-4}$.

4. A função

$$\pi(x) = \begin{cases} x^3 + 3x - 10, & \text{se} \quad x \leq 3, \\ \dfrac{(x-3)^2}{\ln(x-2)} + 26, & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

(A) tem derivada igual a 0 em $x = 3$

(B) tem derivada igual a 30 no ponto $x = 3$

(C) é descontínua no ponto $x = 3$

(D) não é diferenciável em $x = 3$.

5. O valor do integral $\int_0^1 \frac{1}{x} \times \frac{1}{1+(\ln x)^2} dx$ é:

(A) 0

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) $-\infty$

(D) 1.

Grupo I - v.3

Escolha múltipla. **Cotações:** cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota**: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Assinale a resposta certa pondo X sobre a alínea respectiva.

1. Considere o sistema linear

$$A = \begin{cases} \alpha x + 4y + 2z = 13 \\ 6x + y + 2z = 10 \\ 3x + 2y + z = \beta \end{cases}$$

Então

- **(A)** O sistema é impossível se $\alpha = 6$ e $\beta \neq 13/2$
- **(B)** O sistema é impossível se $\alpha = 6$ e $\beta = 13/2$
- **(C)** O sistema é possível e indeterminado se $\alpha \neq 6$ e β for um real arbitrário
- **(D)** O sistema é possível e indeterminado qualquer que seja $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta = 26$.

2. Sendo $f(x) = \dfrac{\ln(100 - |2x-2|)}{\ln(x+2) - 1}$, e notando como D_f o domínio da função f, tem-se:

- **(A)** $D_f =]-2, 51[\backslash \{2\}$ e D_f é abertO
- **(B)** $D_f =]-2, 51[\backslash \{e-2\}$ e D_f é aberto
- **(C)** $D_f =]0, 100[\backslash \{e-2\}$ e D_f não é aberto nem fechado
- **(D)** $D_f = [-2, 51] \setminus \{2\}$ e D_f é fechado.

3. A série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} + (x-4)^n$

- **(A)** é absolutamente convergente em $]3, 5[$ e a sua soma é $e^{2x} + \dfrac{1}{5-x}$
- **(B)** é absolutamente convergente em $\mathbf{R}$ e a sua soma é $e^{2x} + \dfrac{1}{5-x}$
- **(C)** é absolutamente convergente em $]3, 5[$ e a sua soma é $e^{2x} + \dfrac{1}{x-4}$
- **(D)** é absolutamente convergente em $\mathbf{R}$ e a sua soma é $e^{2x} + \dfrac{1}{x-4}$.

4. A função

$$\pi(x) = \begin{cases} x^3 + 3x - 10, & \text{se} \quad x \leq 3, \\ \dfrac{(x-3)^2}{\ln(x-2)} + 26, & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

- **(A)** não é diferenciável em $x = 3$
- **(B)** tem derivada igual a 30 no ponto $x = 3$
- **(C)** é descontínua no ponto $x = 3$
- **(D)** tem derivada igual a 0 em $x = 3$.

5. O valor do integral $\int_0^1 \frac{6}{x} \times \frac{1}{1+(\ln\, x)^2} dx$ é:

- **(A)** $-\infty$
- **(B)** 0
- **(C)** 1
- **(D)** 3π.

Grupo I - v.4

Escolha múltipla. **Cotações:** cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota**: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Assinale a resposta certa pondo X sobre a alínea respectiva.

1. Considere o sistema linear

$$A = \begin{cases} \alpha x + 4y + 2z = 13 \\ 6x + y + 2z = 10 \\ 3x + 2y + z = \beta \end{cases}$$

Então

(A) O sistema é possível e indeterminado qualquer que seja $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta = 26$

(B) O sistema é impossível se $\alpha = 6$ e $\beta = 13/2$

(C) O sistema é possível e indeterminado se $\alpha \neq 6$ e β for um real arbitrário

(D) O sistema é impossível se $\alpha = 6$ e $\beta \neq 13/2$.

2. Sendo $f(x) = \dfrac{\ln(100 - |2x-2|)}{\ln(x+2) - 1}$, e notando como D_f o domínio da função f, tem-se:

(A) $D_f =]-2, 51[\setminus \{e-2\}$ e D_f é aberto

(B) $D_f =]-2, 51[\setminus \{2\}$ e D_f é aberto

(C) $D_f =]0, 100[\setminus \{e-2\}$ e D_f não é aberto nem fechado

(D) $D_f = [-2, 51] \setminus \{2\}$ e D_f é fechado.

3. A série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} + (x-4)^n$

(A) é absolutamente convergente em $\mathbf{R}$ e a sua soma é $e^{2x} + \dfrac{1}{5-x}$

(B) é absolutamente convergente em $]3, 5[$ e a sua soma é $e^{2x} + \dfrac{1}{5-x}$

(C) é absolutamente convergente em $]3, 5[$ e a sua soma é $e^{2x} + \dfrac{1}{x-4}$

(D) é absolutamente convergente em $\mathbf{R}$ e a sua soma é $e^{2x} + \dfrac{1}{x-4}$.

4. A função

$$\pi(x) = \begin{cases} x^3 + 3x - 10, & \text{se} \quad x \leq 3, \\ \dfrac{(x-3)^2}{\ln(x-2)} + 26, & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

(A) tem derivada igual a 0 em $x = 3$

(B) tem derivada igual a 30 no ponto $x = 3$

(C) é descontínua no ponto $x = 3$

(D) não é diferenciável em $x = 3$.

5. O valor do integral $\int_0^1 \frac{4}{x} \times \frac{1}{1+(\ln\, x)^2} dx$ é:

(A) 2π

(B) 0

(C) $-\infty$

(D) 1.

Grupo II

(Cotação: 7.5 (=0.5+2+2+2+1); 3.0; 2.0)

Apresente os cálculos que efectuar e justifique cuidadosamente a resolução das questões seguintes.

1. Estude a função $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$ respondendo às alíneas seguintes:

(a) domínio D_f;

(b) assíntotas e limites nos pontos fronteiros de D_f;

(c) intervalos de monotonia e máximos e mínimos relativos, se existirem;

(d) concavidades e pontos de inflexão;

(e) esboço do gráfico.

2. Calcule o integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{5x}}\,dx$$

.

3. Considere a função

$$f(x) = (x-2)\int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt.$$

Prove que existe um ponto $c \in]0,2[$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugestão: use o teorema de Bolzano)