Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciatura em Economia, Finanças e Gestão

MATEMÁTICA I

Resolução do Exame de Época de recurso

28 de Janeiro de 2013

Grupo II

Tópicos de resolução

1) a) A função $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-9}$ está bem definida excepto nos casos em que o denominador se anula. Assim, temos que,

$$x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \wedge x \neq -3$$

e portanto, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

b) Assímptotas Verticais: $fr(D_f) = \{-3, 3\}$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = -\frac{5}{6} \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x+3} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = -\frac{5}{6} \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x+3} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \frac{5}{6} \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \frac{5}{6} \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

Existem portanto assímptotas verticais à esquerda e à direita nos pontos fronteiros do domínio.

Assímptotas Oblíquas e Horizontais:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x^3-9x} = 0$$

Logo $m = 0$. Para determinar o valor de b,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2-9} = 1$$

E portanto existe assímptota horizontal $y = 1$.

c)

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-9) - (x^2-4)2x}{(x^2-9)^2} = -\frac{10x}{(x^2-9)^2}$$

Podemos então concluir que a derivada se anula em $x = 0$ sendo positiva nos intervalos $) - \infty, -3[$ e $] - 3, 0[$ e negativa nos intervalos $]0, 3[$ e $]3, \infty[$. Logo f é monótona crescente nos intervalos $] - \infty, -3[$ e $] - 3, 0[$ e monótona decrescente nos intervalos $]0, 3[$ e $]3, +\infty[$. Então $x = 0$ é um maximizante relativo, donde $f(0) = 4/9$ é um máximo relativo da função, uma vez que esta é crescente à esquerda e decrescente à direita. Não há mínimo relativo.

d)

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\frac{10x}{(x^2-9)^2}\right)' = -10\frac{(x^2-9)^2 - 4x^2(x^2-9)}{(x^2-9)^4} \\ &= -10\frac{-3x^2-9}{(x^2-9)^3} = \frac{10}{(x^2-9)^2}.\frac{3x^2+9}{x^2-9} \end{aligned}$$

Para determinar o sinal da segunda derivada basta reparar no sinal de $x^2 - 9$ que é o denominador do segundo factor do produto anterior, uma vez o numerador respectivi e o primeiro factor são sempre positivos no donmínio da função. Ora

$$x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 3.$$

Pode então concluir-se que a concavidade é voltada para cima nos intervalos $] - \infty, -3[$ e $]3, +\infty[$ e é voltada para baixo em $] - 3, 3[$. Não existem pontos de inflexão da função, uma vez que os pontos $x = -3$ e $x = 3$ que não fazem parte do domínio.

e) Gráfico da função.

2) Note-se que o integral apresentado é um integral impróprio, pelo que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{5x}}dx = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{x}{e^{5x}}dx = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a xe^{-5x}dx$$

Integrando por partes temos que:

$$\begin{aligned} \int_0^a xe^{-5x}dx &= -\frac{xe^{-5x}}{5}\Big|_0^a + \int_0^a \frac{e^{-5x}}{5}dx \\ &= -\frac{ae^{-5a}}{5} - \frac{e^{-5x}}{25}\Big|_0^a = -\frac{ae^{-5a}}{5} - \frac{e^{-5a}-1}{25} \end{aligned}$$

Pelo que

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a xe^{-5x}dx = \lim_{a\to+\infty} -\frac{ae^{-5a}}{5} - \frac{e^{-5a}-1}{25} = \frac{1}{25}.$$

3) Dado que a função $g(t) = e^{t^2}$ é contínua então, pelo teorema fundamental do cálculo integral, $G(y) = \int_0^y e^{t^2}dt$ é diferenciável e

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y e^{t^2}dt = e^{y^4}$$

. Como $h(x) = x^2$ é diferenciável, sai pelo teorema da função composta que $G\circ h(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}dt$ é diferenciável e:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{x^2} e^{t^2}dt = 2xe^{x^4}.$$

Atendendo a que $v(x) = x - 2$ é uma função diferenciável, a função $f(x)$, sendo produto de duas funções diferenciáveis, é também diferenciável e

$$f'(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}dt + 2(x-2)xe^{x^4}.$$

Temos que f' é também diferenciável e

$$\begin{aligned} f''(x) =& 2xe^{x^4} + (4x-4)e^{x^4} + 8(x-2)x^4e^{x^4} \\ =& e^{x^4}(2x + 4x - 4 + 8x^5 - 16x^4) \\ =& e^{x^4}(-4 + 6x - 16x^4 + 8x^5). \end{aligned}$$

Como a função $f''(x)$ é contínua e, além disso, $f''(0) = -4 < 0$ e $f''(2) = 8e^{16} > 0$, o teorema do valor intermédio de Bolzano garante que

$$\exists c \in]0,2[: f''(c) = 0$$