

Nome: \_\_\_\_\_

Nº: \_\_\_\_\_

*Nas seis perguntas da primeira parte cada resposta certa vale 1.5 valores e uma resposta errada é penalizada em 0.5. Assinale apenas a resposta correcta.*

1. A sucessão de termo geral  $u_n = \left(\frac{5n+1}{5n-1}\right)^{3n+1}$  converge para:

- $e^{\frac{10}{3}}$      
   $e^{\frac{6}{5}}$      
   $e^2$      
   $e^{\frac{3}{5}}$

2. A soma da série  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2}\right)^n$  é igual a:

- $\frac{2}{5-x}$ , para  $x \in [1, 5)$      
   $\frac{2}{2-x}$ , para  $x \in (2, 5)$   
  $\frac{2}{5-x}$ , para  $x \in (1, 5)$      
   $-\frac{2}{x+2}$ , para  $x \in (1, 5)$

3. Seja a função  $f(x) = x^2 e^{kx}$ . Indique o valor de  $k$  para o qual a elasticidade da função  $f$  no ponto  $x = 2$  é unitária:

- $-\frac{1}{2}$      
  1     
   $\frac{1}{2}$      
  -1

4. Indique a equação da recta tangente ao gráfico da função  $y = f(x)$ , definida implicitamente pela equação  $\sin(xy) = y$ , no ponto  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ :

- $y = x$      
   $y = 1$      
   $y = 1 + \frac{\pi}{2}x$      
   $y = x + \frac{2-\pi}{2}$

5. O valor do integral definido  $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$  é igual a:

- 0     
   $\frac{3}{4}$      
  1     
   $\frac{3}{2}$

6. Sabendo que  $|A| = 2$  e que  $B = \frac{1}{2}A'$ , onde  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas de ordem 3, indique o valor do determinante de  $B$ :

- $|B| = \frac{1}{4}$      
   $|B| = 1$      
   $|B| = 4$      
   $|B| = 0$

*Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar. Justifique as respostas.*

Cotações: **1a) 2.0** **1b) 1.5** **1c) 1.0** **2a) 1.0** **2b) 1.5** **3a) 1.5** **3b i) 1.0** **3b ii) 1.5**

1. Considere:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 10 & \alpha \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- a) Classifique o sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  em função dos valores de  $\alpha$  e  $\beta$ .
- b) Resolva o sistema para  $\alpha = -2$  e  $\beta = 4$ .
- c) Considere  $\alpha = 0$ . Calcule o determinante da matriz  $A$ .

2. Considere o conjunto  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \leq e^{3x}, y \leq 1-x\}$ .

- a) Represente graficamente a região plana definida pelo conjunto  $U$ .
- b) Calcule a área da região plana definida pelo conjunto  $U$ .

3. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} a-x, & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{b+x}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}, b > 0$$

- a) Determine os valores de  $a$  e de  $b$  para os quais a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .
- b) Faça  $a = b = 1$  e considere a função definida por  $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ .
  - i) Calcule  $F(1)$ .
  - ii) Mostre que a função  $F$  admite inversa no intervalo  $(0, +\infty)$ .