Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
Época Normal: 20 de Junho de 2006
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(2,5) 1. Determine a área da figura plana limitada pelo gráfico da função $f(x) = \dfrac{cos(x)}{\sqrt{1 + sen(x)}}$, pelo eixo das abcissas e pelas rectas de equação $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{6}$.

(2,5) 2. Considere a sucessão de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(x) = \frac{nx^2 + 1}{nx^4 + 2n}.$$

Diga, justificando, se a sucessão (f_n) converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

(2,5) 3. Desenvolva em série de potências de $(x+1)$ a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, indicando o maior intervalo aberto em que o desenvolvimento é válido.

(2,5) 4. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \sqrt{(x - 2)(16 - x^2 - y^2)}.$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

(b) Indique, justificando, se D_f é um conjunto aberto ou fechado.

(4,0) 5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y - x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f.

(b) Calcule o gradiente de f no ponto $(0, 0)$.

(c) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0, 0)$.

(4,0) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 5y.$$

(a) Determine os extremantes relativos de f, indicando se são maximizantes ou minimizantes.

(b) Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = (cos(x), e^{x+y})$. Determine a matriz jacobiana de $f \circ g$ no ponto $(\pi, -\pi)$.

(2,0) 7. Seja $a > 0$. Considere o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{2x^2 + bx + a}{x(x + a)} - 2 \right| dx.$$

Determine a relação entre a e b de forma a que o integral seja convergente.