Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
Época de Recurso: 30 de Junho de 2006
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(2,5) 1. Determine a área da figura plana limitada pelos gráficos das funções $f(x) = \log(x)$, $g(x) = -\log(x)$ e pelas rectas de equação $x = \frac{1}{e}$ e $x = e$.

(2,5) 2. Estude, em função do parâmetro α a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^\alpha}{\sqrt{x}(x^2+1)} dx.$$

(2,5) 3. Desenvolva em série de potências de $(x-1)$ a função $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$, indicando o maior intervalo aberto em que o desenvolvimento é válido.

(2,5) 4. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{(1-sen(x))(y-x^2)}}{\log(x+y-2)}.$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

(b) Defina analiticamente a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto aberto ou fechado.

(4,0) 5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x^3 + 2(y-1)^2 - x^2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,1) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$.

(b) Indique segundo que vectores $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ existe a derivada $f'_{\overrightarrow{v}}(0,1)$ e, nos casos em que exista, calcule-a.

(c) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0,1)$.

(3,0) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x,y) = e^{xy+xy^2+x^2}.$$

Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

(3,0) 7. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2 e seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$h(x,y) = f(xy) - g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Mostre que, no domínio em que está definida, se tem

$$y^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = x\frac{\partial h}{\partial x} - y\frac{\partial h}{\partial y}.$$