Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
Época Normal: 17 de Janeiro de 2007
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(2,5) 1. Desenvolva em série de potências de $(x+2)$ a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, indicando o maior intervalo aberto em que o desenvolvimento é válido.

(2,5) 2. Indique, justificando, se a sucessão de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \dfrac{n^2 \sin(x) + 1}{n^2 \sin(x) + 2n^2}$ é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

(2,5) 3. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \sqrt{(ln(x^2+y^2))\left(\frac{1}{2} - y\right)}.$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

(b) Indique, justificando, se D_f é um conjunto aberto ou fechado.

(5,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e $f'_{(1,2)}(0,0)$.

(b) Estude, utilizando a definição, a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$.

(c) Poderia ter obtido o resultado da alínea anterior a partir do resultado obtido na alínea (a)? Justifique.

(2,5) 5. Seja f uma função real de variável real diferenciável e considere a função $h : D_h \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = x.y + xf\left(\frac{y}{x}\right)$, para todo $x \neq 0$. Prove que

$$x\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = xy + h(x,y),$$

para todo $x \neq 0$.

(2,5) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x,y) = xye^{x-y}.$$

Determine os extremantes de f, indicando se são maximizantes ou minimizantes.

(2,5) 7. Sejam a_n e b_n duas sucessões de termos positivos tais que a série $\sum a_n$ e a série $\sum(b_n - b_{n+1})$ são convergentes. Mostre que a série $\sum(a_n b_n)$ é também uma série convergente.