Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
Época Especial: 19 de Março de 2007
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(2,5) 1. Considere a seguinte série de potências: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)}(x-1)^{n+1}$.

(a) Estude a convergência da série indicando para que valores de x a série é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

(b) Calcule a soma da série no respectivo intervalo de convergência.

(2,5) 2. Sendo $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ a sucessão de funções definida por $f_n(x) = \frac{1}{(3x)^n+1}$, indique, justificando, se a sucessão (f_n) converge uniformemente nos seguintes intervalos: $[0,3]$ e $[1,4]$.

(2,5) 3. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{(y-x^2)}{(1-|y|)(2-\sin(x))}}.$$

Determine o domínio de f, D_f, represente-o geometricamente e indique, justificando, se D_f é um conjunto aberto ou fechado.

(5,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y-1)^3}{x^2+(y-1)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

(a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0,1)$.

(b) Seja $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $||\overrightarrow{v}|| = 1$. Calcule $f'_{\overrightarrow{v}}(0,1)$.

(c) Prove que a função não é diferenciável no ponto $(0,1)$,

i. aplicando a definição de diferenciabilidade num ponto;

ii. utilizando os resultados obtidos nas alíneas (a) e (b);

(2,5) 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1) = f'(1) = 2$ e $f(2) = f'(2) = 1$ e considere $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(x,y,z) = (f(x^2) + f(x^2+y^2), f(xyz))$. Calcule a matriz jacobiana de g no ponto $(1,1,2)$.

(2,5) 6. Considere $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Determine, em função de α, os pontos críticos da função f definida por:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 - \alpha y^2 + x}{1+z^2},$$

indicando, para cada um deles se é um maximizante, minimizante ou ponto de sela.

(2,5) 7. Sejam a_n e b_n duas sucessões de termos positivos, com $b_n \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tais que a série $\sum a_n$ é divergente e a série $\sum(b_n - b_{n+2})$ é convergente. Estude, quanto à convergência, a série $\sum(a_n b_n)$.