Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2007/2008
Época de Recurso: 31 de Janeiro de 2008
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,0) 1. Estude, quanto à convergência as seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{(n^2+3)+n\sqrt{n^3+1}}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, onde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $a_{n+1} = \dfrac{3na_n}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3,0) 2. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{3}{2x-5}$.

(a) Desenvolva f em série de potências de $(x-3)$, indicando o maior intervalo aberto em que o desenvolvimento é válido.

(b) Indique, justificando, o valor de $f^{(31)}(3)$.

(3,0) 3. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função definida por:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(|x|-2)(9-x^2-(y-1)^2)}}.$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

(b) Dê um exemplo, caso exista, de uma sucessão de pontos pertencentes a D_f que convirja para um ponto que não pertence a D_f e indique, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação:

$$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n \backslash D_f : \lim x_n \in D_f.$$

(4,5) 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (y-3)^2\cos\left(\dfrac{1}{y-3}\right) + (x-1)^2 y & \text{se } y \neq 3 \\ k(x-1)^2 & \text{se } y = 3 \end{cases}$$

(a) Determine o valor de k de forma a que a função f seja contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule a função $\frac{\partial f}{\partial x}$ e indique o seu domínio.

(c) Para o valor de k encontrado na alínea (a) indique, justificando, se f é diferenciável no ponto $(1,3)$.

(3,0) 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função de classe C^1 e considere g definida, a partir de f, por $g(x,y) = f(x^2+y^2, x/y)$.

(a) Calcule, em função das derivadas parciais de f, o gradiente de g.

(b) Mostre que, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y \neq 0$, existe $g'_{(x,y)}(x,y)$ e o seu valor é

$$g'_{(x,y)}(x,y) = 2(x^2+y^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x^2+y^2, x/y).$$

(2,5) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = x^2 y(6-x-y).$$

Determine os pontos de estacionaridade de f e escolha dois dos pontos encontrados para determinar se se tratam de extremantes ou pontos de sela.