Análise Matemática II

LISTA 3

(1) (a) Prove que se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum a_n^2$ também é absolutamente convergente.

(b) Dê exemplos de a_n tais que:

(i) $\sum a_n^2$ é absolutamente convergente e $\sum a_n$ diverge.

(ii) $\sum a_n$ é simplesmente convergente e $\sum a_n^2$ diverge.

(iii) $\sum a_n$ é simplesmente convergente e $\sum a_n^2$ é absolutamente convergente.

(2) Seja u_n uma sucessão convergente tal que $u_n u_{n+1} < 0$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Indique $\lim u_n$.

(b) Prove que se $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, então $\sum u_n$ é convergente com soma entre u_1 e $u_1 + u_2$.

(3) Ler capítulos III.2.4, V.2.2 e IV.2.1 de Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*.

(4) Estude a convergência pontual e uniforme das seguintes sucessões de funções nos intervalos dados:

(a) $f_n(x) = \dfrac{nx^2+1}{nx^4+2n}$ em $\mathbb{R}$

(b) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n+1}$ em $[0,1]$

(c) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x^2}$ em $]-1,1[$ e $\mathbb{R}$

(d) $g_n(x) = \dfrac{2n^2x^2}{1+2n^2x^2}$ em $[-3,+\infty[$ e $[3,+\infty[$

(e) $f_n(x) = \dfrac{ne^x}{1+ne^x}$ em $]-\infty,-1]$ e $[1,+\infty[$

(f) $f_n(x) = n \sin\left(\dfrac{x+1}{n}\right)$ em $\mathbb{R}$

(5) Dada a sucesão $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, mostre que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right) \neq \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx.$$

Que conclusão pode tirar acerca da convergência uniforme de f_n em $[0,1]$?

(6) Seja f_n a sucessão de funções definida por

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}.$$

(a) Calcule o limite pontual de f_n no intervalo $[0,1]$ e indique se a convergência é uniforme nesse mesmo intervalo.

(b) Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

(7) Estude a convergência uniforme das seguintes séries nos conjuntos indicados:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ em $[-1,1]$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x(1-x)^n$ em $[0,1]$