

**Primeira Parte** (15 valores)

As 10 perguntas são de escolha múltipla. Preencha a **folha de respostas**, assinalando com uma cruz a **versão A** e indicando uma só resposta. Cada resposta correcta vale **1,5**. As respostas erradas são penalizadas.

1. A soma da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{x}$ , com  $x \neq 0$ , é igual a:

a)  $\frac{x^2}{1-x^3}$ , se  $x \in [-1, 1)$

b)  $\frac{x}{1-x^2}$ , se  $x \in (-1, 1)$

c)  $\frac{x^2}{1-x^3}$ , se  $x \in (-1, 1)$

d)  $\frac{x}{1-x^2}$ , se  $x \in [-1, 1)$

2. Qual é o tempo  $t$  (em anos) necessário para que um depósito de 100 euros numa conta de poupança com juros compostos à taxa anual de 10% duplique ?

a)  $t = \frac{\ln 2}{\ln 1,1}$

b)  $t = 2 \times 1,1$

c)  $t = \ln 2 - \ln 0,1$

d)  $e^{1,1}$

3. Seja a função  $f(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2$ . A aproximação de Taylor de segunda ordem de  $f$  em torno de  $x = 1$  é:

a)  $x - 1 + (x - 1)^2$

b)  $x - 1 - (x - 1)^2$

c)  $-(x - 1)^2$

d)  $(x - 1)^2$

4. Seja a função  $f(x) = be^{\frac{x}{b}-1}$ , sendo  $b$  uma constante não nula. A elasticidade de  $f$  em relação a  $x$  é igual a:

a)  $x$

b)  $\frac{x}{b}$

c)  $\frac{x}{b} \text{El}_x f(x)$

d)  $x \text{El}_x f(x)$

5. Indique o valor correcto de  $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2x}$ :

a) não existe  $L$

b)  $L = 0$

c)  $L = \infty$

d)  $L = 1$

6. Seja a função  $f(x) = 2x + 3x^{\frac{2}{3}}$ . Os pontos estacionários de  $f$  são:

- a)  $x = \pm 1, x = 0$       b)  $x = 0$       c) não existem      d)  $x = -1$

7. O valor do integral definido  $\int_0^1 xe^{1-x} dx$  é:

- a)  $2 - e$       b)  $e - 2$       c)  $e$       d)  $-e$

8. O integral indefinido  $\int x^2(x^3 + 3)^3 dx$  é igual a:

- a)  $\frac{(x^3 + 3)^4}{12} + k$       b)  $\frac{(x^3 + 3)^4}{4} + k$       c)  $\frac{x^2(x^3 + 3)^4}{12} + k$       d)  $\frac{x^3(x^3 + 3)^4}{12} + k$

9. Seja a seguinte matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

O determinante da matriz M é igual a:

- a)  $-\alpha\beta\delta\gamma$       b) 0      c)  $\alpha\beta\delta\gamma$       d)  $-\delta$

10. Considere a matriz seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Indique a resposta correcta:

- a)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$       b)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$   
c)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$       d)  $A^{-1}$  não existe

## Segunda Parte (5 valores)

Os cálculos que tiver de efectuar para responder às 3 perguntas seguintes devem ser cuidadosamente justificados.  
Cotações: 1.a) **0,5**; 1.b) **0,75**; 1.c) **0,75**; 2.a) **0,75**; 2.b) **0,75**; 3. **1,5**.

1. Considere a função  $f(x) = \ln(x+1)$ .

- a) Calcule  $f(0)$  e  $f^{(k)}(0)$ , com  $k = 1, 2, 3, 4$ .
- b) Escreva a fórmula de Taylor de ordem  $n$  em torno de  $x = 0$ .
- c) Use o resultado anterior para mostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$  (não utilize a regra de L'Hôpital).

2. Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + ay + bz = 1 \\ 2x + 2bz = 3 \\ x + ay - z = 1 \end{cases}, \text{ com } a, b \in \tilde{\mathbb{N}}$$

- a) Determine os valores dos parâmetros  $a$  e  $b$  que tornam o sistema possível e determinado, possível e indeterminado e impossível.
- b) Resolva o sistema para  $a = b = -1$ .

3. Calcule a área da região plana, limitada por  $f(x) = -x^2 + x + 2$  e pelo eixo dos  $xx$ .