1º Ano/1º Semestre **Época de Recurso 2006/2007**

Matemática I

VERSÃO A Duração da prova: **2** horas

Primeira Parte (15 valores)

As 10 perguntas são de escolha múltipla. Preencha a **folha de respostas**, assinalando com uma cruz a **versão A** e indicando uma só resposta. Cada resposta correcta vale **1,5**. As respostas erradas são penalizadas.

1. Considere a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{an^2+n}{n^2-1}$, com $a \in$ Ñ . Indique a resposta correcta:

a) se $a \neq 0$ então a série é divergente

b) se $a \neq 0$ então a série é convergente

c) a série é convergente, $\forall a \in$ Ñ

d) a série é convergente, para $a = 1$

2. Seja a função $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $2 + x^2 y - x = 2y^2$ e $y(0) = -1$. A equação da recta tangente ao gráfico da função $f(x)$ no ponto $x = 0$ é:

a) $y = -\frac{x}{4} - 1$ b) $y = \frac{x}{4} - 1$ c) $y = -\frac{x}{4} + 1$ d) $y = \frac{x}{4} + 1$

3. Considere a função $f(x) = \ln(2x-1) + 2x^2$. A aproximação de Taylor de segunda ordem de f em torno de $x = 1$ é:

a) $2 + 6x + \frac{x^2}{2}$ b) $6 + \frac{(x-1)^2}{2}$ c) $6x - 4$ d) $6x^2 + 6x$

4. Seja a função $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{a}\right)$, sendo a uma constante positiva. A elasticidade de f em relação a x é igual a:

a) $\frac{a}{x\,f(x)}$ b) $2f(x)$ c) $\frac{2a}{x\,f(x)}$ d) $\frac{2}{f(x)}$

5. Indique o valor correcto de $\mathrm{L} = \lim_{x \to 1} \frac{x^\alpha + \alpha(1-x) - 1}{x^2 - 2x + 1}$.

a) $\mathrm{L} = -\alpha - 2$ b) $\mathrm{L} = 0$ c) $\mathrm{L} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$ d) L não existe

6. Sabendo que $f(x) = x^3 + 2x - 1$ admite uma função inversa g e que $f(1) = 2$, calcule o declive da recta tangente ao gráfico de g no ponto indicado.

a) $\frac{1}{5}$ b) 1 c) 2 d) 5

7. O integral definido $\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{x}{x^2+1}\, dx$ é igual a:

a) $\sqrt{-1+e}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{1}{2}\sqrt{-1+e}$

8. Considere os vectores $a = (1,\ 2,\ 1)$, $b = (1,\ 1,\ 0)$ e $c = (0,\ 1,\ 0)$. O valor da expressão $a \bullet (b + c)$ é igual a:

a) $(1,\ 2,\ 0)$ b) 2 c) 5 d) 1

9. Seja a seguinte matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

O determinante da matriz M é igual a:

a) 11 b) -7 c) 7 d) 0

10. Seja A uma matriz cujas linhas são os vectores $u = [1,\ 2,\ 3,\ 4]$, $v = [2,\ 4,\ 6,\ 8]$ e $w = [0,\ 0,\ 1,\ 0]$. Sendo $r(A)$ a característica da matriz A, indique a resposta correcta:

a) $r(A) = 3$ e os vectores u, v e w são linearmente independentes
b) $r(A) = 2$ e os vectores u, v e w são linearmente independentes
c) $r(A) = 3$ e os vectores u, v e w são linearmente dependentes
d) $r(A) = 2$ e os vectores u, v e w são linearmente dependentes

<u>Segunda Parte</u> (5 valores)

Os cálculos que tiver de efectuar para responder às 3 perguntas seguintes devem ser cuidadosamente justificados.
<u>Cotações</u>: 1.a) **0,5**; 1.b) **0,75**; 1.c) **0,75**; 2.a) **075**; 2.b) **0,75**; 3.a) **1,0**; 3.b) **0,5**.

1. Considere a função real de variável real

$$f(x)=\begin{cases} xe^{x} & \text{se } x<0 \\ \dfrac{x+1}{\ln x} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

a) Indique o domínio da função *f*, D_f.

b) Justifique, convenientemente, a seguinte afirmação: "É possível definir a função $f(x)$ em $x=0$, de tal modo que $f(x)$ seja contínua em $D_f \cup \{0\}$".

c) Escreva a única função possível a que se refere a alínea anterior.

2. Considere a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$ e $b,\ c\in$ Ñ.

a) Utilizando o teorema do valor médio, encontre condições para *a*, *b* e *c* de tal forma que a proposição seguinte "existe $\xi\in(0,\ 1)$ tal que $f'(\xi)=0$" seja verdadeira.

b) Determine o valor de x a que se refere a alínea anterior.

3. Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x-2y+3z=3 \\ ax-y \qquad\ \ =b \\ 2x+2y \qquad =0 \end{cases}, \text{ com } a,b\in \text{Ñ}$$

a) Determine os valores dos parâmetros *a* e *b* que tornam o sistema possível e determinado, possível e indeterminado e impossível.

b) Faça $a=b=0$ e use a regra de Cramer para determinar o valor da incógnita *y*.