

Primeira Parte (13,5 valores)

As 9 perguntas são de escolha múltipla. Preencha a **folha de respostas**, assinalando com uma cruz a **versão A** e indicando uma só resposta. Cada resposta correcta vale **1,5**. As respostas erradas são penalizadas.

1. A soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n$ é igual a:

a) $\frac{2}{3-x}$, se $x \in [-1, 3)$

b) $\frac{2}{3-x}$, se $x \in (-3, 1)$

c) $\frac{2}{1-x}$, se $x \in (-1, 1)$

d) $\frac{2}{1-x}$, se $x \in (-3, 1)$

2. A sucessão de termo geral $u_n = \left(\frac{2n^2+4}{2n^2+1}\right)^{n^2}$ converge para:

a) $L = e^{\frac{3}{2}}$

b) $L = 1$

c) $L = e^{\frac{1}{2}}$

d) $L = e^3$

3. Seja a função $f(x) = \ln(2x+3)$. A aproximação de Taylor de segunda ordem de f em torno de $x = -1$ é:

a) $2(x-1) - 2(x-1)^2$

b) $2(x+1) - (x+1)^2$

c) $2(x+1) - 2(x+1)^2$

d) $2(x-1) - (x-1)^2$

4. Seja a função $h(x) = f(x \ln x)$, com f diferenciável em \mathbb{R} . Sabendo que $f(0) = \sqrt{3}$ e que $f'(0) = 2$, indique a equação da recta tangente ao gráfico da função h , em $x = 1$:

a) $y = 2x - \sqrt{3}$

b) $y = \sqrt{3}x + 2$

c) $y = -2x + \sqrt{3}$

d) $y = 2x - 2 + \sqrt{3}$

5. Indique o valor correcto de $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$:

- a) $L = 0$ b) $L = -\frac{1}{2}$ c) $L = +\infty$ d) $L = -\infty$

6. Seja a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & \text{se } x < -1 \\ ax+b, & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Indique os valores de a e b para os quais a função f é contínua:

- a) $a = b = -3$ b) $a = b = 3$ c) $a = 3$ e $b = -3$ d) $a = -3$ e $b = 3$

7. O integral indefinido $\int \frac{1}{9x^2+4} dx$ é igual a:

- a) $6 \arctan(3x) + c$ b) $6 \arctan\left(\frac{3}{2}x\right) + c$
c) $4 \arctan(3x) + c$ d) $\frac{1}{6} \arctan\left(\frac{3}{2}x\right) + c$

8. A área da região delimitada pelas funções $f(x) = e^x$, $g(x) = (x-1)^2$ e pela recta de equação $x = 1$ é igual a:

- a) $e + \frac{4}{3}$ b) $e - \frac{4}{3}$ c) $e - \frac{2}{3}$ d) $e + \frac{2}{3}$

9. Considere os seguintes vectores de \mathbb{R}^3 :

$$\vec{u}_1 = (-1, 2, 3), \quad \vec{u}_2 = (1, -1, 2), \quad \vec{u}_3 = (4, -6, -2)$$

Indique a resposta correcta:

- a) Os 3 vectores são linearmente independentes.
b) Os vectores são ortogonais dois a dois.
c) O vector \vec{u}_3 é combinação linear dos vectores \vec{u}_1 e \vec{u}_2 .
d) Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

Segunda Parte (6,5 valores)

Os cálculos que tiver de efectuar para responder às 2 perguntas seguintes devem ser cuidadosamente justificados.

Cotações: 1.a) 1; 1.b) 1,5; 1.c) 1; 2.a) 1,5; 2.b) 1,5.

1. Considere:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

- a) Determine os valores de α para os quais a segunda linha e a quarta linha da matriz A são ortogonais.
- b) Classifique o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em função dos valores de α e β .
- c) Faça $\alpha = 0$. Sabendo que $B = 3A^{-1}$, calcule o determinante de B .

2. Considere a função com domínio D_f :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 1, & x < 0 \\ e^{2x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Para que valores de $x \in D_f$, a função f é diferenciável? Escreva a expressão da função derivada $f'(x)$.

- b) Determine $G(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$, definida em $[-1, \infty)$.