

Primeira Parte (13,5 valores)

As 9 perguntas são de escolha múltipla. Preencha a **folha de respostas**, assinalando com uma cruz a **versão B** e indicando uma só resposta. Cada resposta correcta vale **1,5**. As respostas erradas são penalizadas.

1. Seja $Ax = b$ um sistema com 4 equações e 5 incógnitas. Sabendo que o sistema tem dois graus de liberdade, indique a característica da matriz A :

- a) 3 b) 2 c) 1 d) 4

2. Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

O determinante de A é nulo para:

- a) qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ b) $\alpha = -1$ c) $\alpha = 1$ d) $\alpha = 0$

3. O integral $\int_0^{+\infty} 2xe^{-x} dx$ é igual a:

- a) 2 b) 0 c) -2 d) ∞

4. Seja a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{e^x - 1}, & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Indique a resposta correcta:

- a) f é diferenciável e não é contínua em $x = 1$
- b) f é diferenciável e é contínua em $x = 1$
- c) f não é diferenciável e não é contínua em $x = 1$
- d) f não é diferenciável e é contínua em $x = 1$

5. Considere a função $f(x) = x^{4x}$, com $x > 0$. A equação da recta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é dada por:

- a) $y = 4 \ln x - 3$
- b) $y = x^{4x} \ln x$
- c) $y = 4x - 3$
- d) $y = 4 \ln x + 4$

6. Considere a função $f(x) = (1 - 2x)e^{-x}$ definida em \mathbb{R} . Indique a resposta correcta:

- a) f é côncava em $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$
- b) f é côncava em $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$
- c) f é convexa em $(-\infty, +\infty)$
- d) f é convexa em $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$

7. A inequação $\ln(1 + e^x) > 0$ admite como conjunto de soluções:

- a) $(-\infty, 0)$
- b) $(-\infty, +\infty)$
- c) $(0, +\infty)$
- d) $[0, 1)$

8. Seja a função $g(x) = f(\arctan(x))$, com f diferenciável em \mathbb{R} . Sabendo que $f'(\frac{\pi}{4}) = 2$ indique o valor de $g'(1)$:

- a) $\frac{\pi}{8}$
- b) $-\pi$
- c) 1
- d) $\frac{1}{2}$

9. Seja a função $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $x^2y + x = x^2 - 3y$. Indique o valor correcto da elasticidade de y em relação a x no ponto $\left(3, \frac{1}{2}\right)$:

- a) $\text{El}_x y = \frac{3}{2}$
- b) $\text{El}_x y = \frac{1}{2}$
- c) $\text{El}_x y = \frac{1}{6}$
- d) $\text{El}_x y = 1$

Segunda Parte (6,5 valores)

Os cálculos que tiver de efectuar para responder às 3 perguntas seguintes devem ser cuidadosamente justificados.
Cotações: 1. a) **1,5**; 1. b) **1**; 1. c) **1**; 2. **1,5**; 3. **1,5**.

1. Considere o sistema de equações lineares:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \alpha z = 1 \\ 3x + y = 4 \\ 7x + 5y + z = \beta \end{cases}, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- a) Classifique o sistema quanto às suas soluções em função dos valores de α e β .
- b) Indique justificando os valores de α para os quais a matriz A é invertível.
- c) Sabendo que $x^{(1)}$ é solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e que $x^{(0)}$ é uma solução não nula do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, prove que $x^{(0)} + x^{(1)}$ é solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

2. Calcule a área da região delimitada pelo gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ definida no intervalo $[0, 3]$ e pelas rectas de equações $y = 2x - 3$ e $y = -x + 3$.

3. Aplique a fórmula de Taylor, em torno de 0, à função $f(x) = \ln(1+x)$ para provar que: $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.