1º Ano/1º Semestre	Época de Recurso 2007/2008
Matemática I	
VERSÃO C	<u>Duração da prova</u>: 2 horas

<u>Primeira Parte</u> (13,5 valores)

As **9** perguntas são de escolha múltipla. Preencha a **folha de respostas**, assinalando com uma cruz a **versão C** e indicando uma só resposta. Cada resposta correcta vale **1,5**. As respostas erradas são penalizadas.

1. O integral $\int_0^{+\infty} 2xe^{-x}dx$ é igual a:

a) ∞ b) 0 c) -2 d) 2

2. Considere a função $f(x)=(1-2x)e^{-x}$ definida em R. Indique a resposta correcta:

a) f é convexa em $\left[\frac{5}{2},\ +\infty\right)$

b) f é convexa em $(-\infty,\ +\infty)$

c) f é côncava em $\left(-\infty,\ \frac{5}{2}\right]$

d) f é côncava em $\left[\frac{5}{2},\ +\infty\right)$

3. Seja a função $g(x)=f(\arctan(x))$, com f diferenciável em R. Sabendo que $f'(\frac{\pi}{4})=2$ indique o valor de $g'(1)$:

a) $-\pi$ b) 1 c) $\frac{\pi}{8}$ d) $\frac{1}{2}$

4. A inequação $\ln(1+e^{x})>0$ admite como conjunto de soluções:

a) $(-\infty,\ 0)$ b) $(0,\ +\infty)$ c) $(-\infty,\ +\infty)$ d) $[0,\ 1)$

5. Seja $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ um sistema com 4 equações e 5 incógnitas. Sabendo que o sistema tem dois graus de liberdade, indique a característica da matriz A:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 3

6. Seja a função $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $x^2 y + x = x^2 - 3y$. Indique o valor correcto da elasticidade de y em relação a x no ponto $\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$:

a) $\mathrm{El}_x y = 1$ b) $\mathrm{El}_x y = \frac{1}{2}$ c) $\mathrm{El}_x y = \frac{3}{2}$ d) $\mathrm{El}_x y = \frac{1}{6}$

7. Seja a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2}, & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{\ln x}{e^x - 1}, & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Indique a resposta correcta:

a) f não é diferenciável e é contínua em $x = 1$

b) f é diferenciável e não é contínua em $x = 1$

c) f é diferenciável e é contínua em $x = 1$

d) f não é diferenciável e não é contínua em $x = 1$

8. Considere a função $f(x) = x^{4x}$, com $x > 0$. A equação da recta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é dada por:

a) $y = 4\ln x - 3$ b) $y = 4x - 3$ c) $y = 4\ln x + 4$ d) $y = x^{4x} \ln x$

9. Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}, \text{ com } \alpha \in \mathrm{R}.$$

O determinante de A é nulo para:

a) $\alpha = 1$ b) $\alpha = 0$ c) $\alpha = -1$ d) qualquer $\alpha \in \mathrm{R}$

<u>**Segunda Parte**</u> (6,5 valores)

Os cálculos que tiver de efectuar para responder às 3 perguntas seguintes devem ser cuidadosamente justificados.
<u>Cotações</u>: 1. a) **1,5**; 1. b) **1**; 1.c) **1**; 2. **1,5**; 3. **1,5**.

1. Considere o sistema de equações lineares:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{cases} x + y + \alpha z = 1 \\ 3x + y = 4 \\ 7x + 5y + z = \beta \end{cases}, \quad \text{com } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

a) Classifique o sistema quanto às suas soluções em função dos valores de α e β.

b) Indique justificando os valores de α para os quais a matriz A é invertível.

c) Sabendo que $x^{(1)}$ é solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e que $x^{(0)}$ é uma solução não nula do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, prove que $x^{(0)} + x^{(1)}$ é solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

2. Calcule a área da região delimitada pelo gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ definida no intervalo $[0,\ 3]$ e pelas rectas de equações $y = 2x - 3$ e $y = -x + 3$.

3. Aplique a fórmula de Taylor, em torno de 0, à função $f(x) = \ln(1+x)$ para provar que: $\forall x > 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.