1º Ano/1º Semestre	**Época de Recurso 2007/2008**
Matemática I	
VERSÃO D	**Duração da prova: 2 horas**

Primeira Parte (13,5 valores)

As **9** perguntas são de escolha múltipla. Preencha a **folha de respostas**, assinalando com uma cruz a **versão D** e indicando uma só resposta. Cada resposta correcta vale **1,5**. As respostas erradas são penalizadas.

1. Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix}, \text{ com } \alpha \in \mathrm{R}.$$

O determinante de A é nulo para:

a) qualquer $\alpha \in \mathrm{R}$ b) $\alpha = 1$ c) $\alpha = 0$ d) $\alpha = -1$

2. Considere a função $f(x) = x^{4x}$, com $x > 0$. A equação da recta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é dada por:

a) $y = 4x - 3$ b) $y = x^{4x} \ln x$ c) $y = 4\ln x + 4$ d) $y = 4\ln x - 3$

3. Seja $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ um sistema com 4 equações e 5 incógnitas. Sabendo que o sistema tem dois graus de liberdade, indique a característica da matriz A:

a) 1   b) 2   c) 3   d) 4

4. Seja a função $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $x^2y + x = x^2 - 3y$. Indique o valor correcto da elasticidade de y em relação a x no ponto $\left(3, \frac{1}{2}\right)$:

a) $\mathrm{El}_x y = \frac{3}{2}$ b) $\mathrm{El}_x y = 1$ c) $\mathrm{El}_x y = \frac{1}{2}$ d) $\mathrm{El}_x y = \frac{1}{6}$

5. Considere a função $f(x)=(1-2x)e^{-x}$ definida em R. Indique a resposta correcta:

a) f é côncava em $\left(-\infty,\ \frac{5}{2}\right]$ b) f é convexa em $(-\infty,\ +\infty)$

c) f é côncava em $\left[\frac{5}{2},\ +\infty\right)$ d) f é convexa em $\left[\frac{5}{2},\ +\infty\right)$

6. O integral $\int_0^{+\infty} 2xe^{-x}dx$ é igual a:

a) -2 b) 0 c) ∞ d) 2

7. A inequação $\ln(1+e^x)>0$ admite como conjunto de soluções:

a) $(-\infty,\ +\infty)$ b) $[0,\ 1)$ c) $(-\infty,\ 0)$ d) $(0,\ +\infty)$

8. Seja a função $g(x)=f(\arctan(x))$, com f diferenciável em R. Sabendo que $f'(\frac{\pi}{4})=2$ indique o valor de $g'(1)$:

a) 1 b) $\frac{\pi}{8}$ c) $-\pi$ d) $\frac{1}{2}$

9. Seja a função real de variável real definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & \text{se } 0\le x\le 1 \\ \dfrac{\ln x}{e^x-1}, & \text{se } 1<x\le 2 \end{cases}$$

Indique a resposta correcta:

a) f é diferenciável e é contínua em $x=1$

b) f não é diferenciável e é contínua em $x=1$

c) f é diferenciável e não é contínua em $x=1$

d) f não é diferenciável e não é contínua em $x=1$

Segunda Parte (6,5 valores)

Os cálculos que tiver de efectuar para responder às 3 perguntas seguintes devem ser cuidadosamente justificados.
Cotações: 1. a) **1,5**; 1. b) **1**; 1.c) **1**; 2. **1,5**; 3. **1,5**.

1. Considere o sistema de equações lineares:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{cases} x + y + \alpha z = 1 \\ 3x + y = 4 \\ 7x + 5y + z = \beta \end{cases}, \quad \text{com } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

a) Classifique o sistema quanto às suas soluções em função dos valores de α e β.

b) Indique justificando os valores de α para os quais a matriz A é invertível.

c) Sabendo que $x^{(1)}$ é solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e que $x^{(0)}$ é uma solução não nula do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, prove que $x^{(0)} + x^{(1)}$ é solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

2. Calcule a área da região delimitada pelo gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ definida no intervalo $[0,\ 3]$ e pelas rectas de equações $y = 2x - 3$ e $y = -x + 3$.

3. Aplique a fórmula de Taylor, em torno de 0, à função $f(x) = \ln(1+x)$ para provar que: $\forall x > 0,\ x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.