

Nome: _____

Nº: _____

Nas seis perguntas da primeira parte cada resposta certa vale 1.5 valores e uma resposta errada é penalizada em 0.5. Assinale apenas a resposta correcta.

1. O valor do integral definido $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$ é igual a:

- 1 $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{2}$ 0

2. Sabendo que $|A| = 2$ e que $B = \frac{1}{2}A'$, onde A e B são matrizes quadradas de ordem 3, indique o valor do determinante de B :

- $|B| = 1$ $|B| = 0$ $|B| = 4$ $|B| = \frac{1}{4}$

3. A soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2}\right)^n$ é igual a:

- $\frac{2}{5-x}$, para $x \in [1, 5)$ $\frac{2}{5-x}$, para $x \in (1, 5)$
 $-\frac{2}{x+2}$, para $x \in (1, 5)$ $\frac{2}{2-x}$, para $x \in (2, 5)$

4. Indique a equação da recta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$, definida implicitamente pela equação $\sin(xy) = y$, no ponto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$:

- $y = 1$ $y = x$ $y = 1 + \frac{\pi}{2}x$ $y = x + \frac{2-\pi}{2}$

5. Seja a função $f(x) = x^2 e^{kx}$. Indique o valor de k para o qual a elasticidade da função f no ponto $x = 2$ é unitária:

- $\frac{1}{2}$ -1 $-\frac{1}{2}$ 1

6. A sucessão de termo geral $u_n = \left(\frac{5n+1}{5n-1}\right)^{3n+1}$ converge para:

- e^2 $e^{\frac{3}{5}}$ $e^{\frac{10}{3}}$ $e^{\frac{6}{5}}$

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar. Justifique as respostas.

Cotações: 1a) 2.0 1b) 1.5 1c) 1.0 2a) 1.0 2b) 1.5 3a) 1.5 3b i) 1.0 3b ii) 1.5

1. Considere:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 10 & \alpha \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

a) Classifique o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em função dos valores de α e β .

b) Resolva o sistema para $\alpha = -2$ e $\beta = 4$.

c) Considere $\alpha = 0$. Calcule o determinante da matriz A .

2. Considere o conjunto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \leq e^{3x}, y \leq 1-x\}$.

a) Represente graficamente a região plana definida pelo conjunto U .

b) Calcule a área da região plana definida pelo conjunto U .

3. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} a-x, & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{b+x}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}, b > 0$$

a) Determine os valores de a e de b para os quais a função f é contínua em \mathbb{R} .

b) Faça $a = b = 1$ e considere a função definida por $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$.

i) Calcule $F(1)$.

ii) Mostre que a função F admite inversa no intervalo $(0, +\infty)$.