Álgebra linear – 2008/2009 (2º semestre)

Ficha nº 2

1. Considere os seguintes vectores: $\mathbf{u} = [a,\ 0,\ 3]$, $\mathbf{v} = [2,\ 1,\ -1]$ e $\mathbf{w} = [b,\ -2,\ 2]$.
   a) Determine os valores de a para os quais os vectores **u** e **v** são ortogonais.
   b) Determine os valores de b para os quais os vectores **v** e **w** são paralelos.
   c) Considere $b = 1$. Determine os valores de a tais que $\mathbf{u} \in \mathrm{sp}\,(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

2. Sejam os vectores $\mathbf{u} = [0,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 2]$ e $\mathbf{v} = [1,\ \ -1,\ \ 0,\ \ 1]$. Determine o conjunto dos vectores ortogonais aos vectores **u** e **v**.

3. Sejam os vectores $\mathbf{u} = [0,\ 2,\ 0,\ 6]$, $\mathbf{v} = [0,\ a,\ 0,\ 3]$ e $\mathbf{w} = [0,\ 0,\ 0,\ 3]$.
   a) Indique os valores de a para os quais:
      i) Os vectores **u** e **v** são paralelos.
      ii) Os vectores **u** e **v** são ortogonais.
      iii) O vector **v** é unitário.
      iv) $\mathbf{w} \in \mathrm{sp}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.
   b) Indique se é verdadeira ou falsa a seguinte proposição: $\mathrm{sp}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Re^2$.

4. Sejam **u** e **v** vectores de $\Re^n$ tais que $\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} = 0$. Prove que se $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ então $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

5. Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n e simétricas. Prove que AB é simétrica se e só se as matrizes A e B são permutáveis.

6. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ e \ B = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 3 & b & 0 \\ 0 & 3 & b \end{bmatrix},\ b \in \Re,$$

   a) Calcule A^2, A^3 e A^n, $\forall\, n \in \mathrm{N}$.
   b) Escreva a matriz B como combinação linear das matrizes I e A, onde I é a matriz identidade de ordem 3 e utilize esse resultado para calcular B^3.