



**Mathematical Economics**  
**Exam – 14/01/08**  
**Duration: 3h00**

NOTE: Answer each group in separate sheets. Justify clearly all answers.

**I**

1. **(2.0)** Consider the following functions:

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) &= (u - v, f(u^2)) \\ \Omega(s, t) &= (s, s + t),\end{aligned}$$

where  $f$  is  $C^2$  in  $R$

- (a) Write the Jacobian Matrices of  $\Phi$  and  $\Omega$ .  
(b) Now, consider the composition of the two functions  $w(u, v) = (\Omega \circ \Phi)(u, v)$ . Construct explicitly the function  $w = (w_1, w_2)$ .

2. **(2.0)** Consider the following function

$$f(x) = (x + 1)e^{-x}.$$

Compute the integral using integration by parts,

$$\int f(x) dx.$$

3. **(2.0)** Without using the definition of homogeneity show that the function  $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$  is homogeneous and indicate the degree of homogeneity.

**II**

1. **(3.5)** Consider the following correspondence  $\varphi(x)$  where  $x$  is a real number and  $\varphi(x)$  is a set of real numbers.

- a)**  $0 \leq x < 1$ ,  $\varphi(x) = \{x + 2\}$   
**b)**  $x = 1$ ,  $\varphi(x) = [0, 5]$   
**c)**  $5 \geq x > 1$ ,  $\varphi(x) = \{x - 1\}$

Can the Theorem of Kakutani be used to assure that the correspondence has a fixed point? Justify your answer. Now consider that a) and c) remain the same and

b)  $x = 1$ ,  $\varphi(x) = \{0, 4, 5\}$ . Can the Theorem of Kakutani be used to assure that the correspondence has a fixed point? Justify.

2. **(3.5)** Consider the following excess demand functions in a Walrasian model with two goods 1 and 2.  $p_1$  and  $p_2$  are respectively the prices of good 1 and 2.

$$\begin{aligned} Z_1(p_1, p_2) &= p_1 - p_2^2 - ap_1p_2 \\ Z_2(p_1, p_2) &= 3p_1^2 + p_1p_2 - \frac{p_1^2}{p_2} \end{aligned}$$

- (a) Without computing the equilibrium prices, indicate the value of  $a$  which guarantees the existence of those prices and explain why.  
 (b) After answering the previous question, compute the equilibrium prices.

### III

1. **(2.5)** Consider a continuous time version of a two-state Markov process  $\dot{y} = My$ , where the transition matrix is

$$M = \begin{pmatrix} -\pi_1 & \pi_1 \\ \pi_2 & -\pi_2 \end{pmatrix}$$

for  $0 < \pi_1 < 1$  and  $0 < \pi_2 < 1$

- (a) solve the differential equation;  
 (b) let  $y(0) = (0, 1)$ . Solve the initial value problem;  
 (c) draw the phase diagram associated to the initial value problem.
2. **(2.5)** Assume that that a consumer has an endowment denoted by  $W_t$  at time  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ . The horizon  $T$  is finite. The endowment evolves over time as  $W_{t+1} = (1 + r)W_t - C_t$ , where  $C_t$  is the amount of the endowment consumed at time  $t$  and  $r > 0$  is a parameter. Assume that  $W_0 = \phi > 0$  and that the consumer wants to have  $W_T = \phi$ . The consumer has a psychological discount factor  $0 < \beta < 1$  and a static logarithmic utility function.
- (a) Transform the problem into a calculus of variations problem and determine the Euler-Lagrange equation.  
 (b) Solve the problem. Consider a continuous time version of a two-state Markov process  $\dot{y} = My$ , where the transition matrix is

$$M = \begin{pmatrix} -\pi_1 & \pi_1 \\ \pi_2 & -\pi_2 \end{pmatrix}$$

for  $0 < \pi_1 < 1$  and  $0 < \pi_2 < 1$

- (c) solve the differential equation;
  - (d) let  $y(0) = (0, 1)$ . Solve the initial value problem;
  - (e) draw the phase diagram associated to the initial value problem.
3. **(2.0)** Assume that that a consumer has an endowment denoted by  $W_t$  at time  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ . The horizon  $T$  is finite. The endowment evolves over time as  $W_{t+1} = (1 + r)W_t - C_t$ , where  $C_t$  is the amount of the endowment consumed at time  $t$  and  $r > 0$  is a parameter. Assume that  $W_0 = \phi > 0$  and that the consumer wants to have  $W_T = \phi$ . The consumer has a psychological discount factor  $0 < \beta < 1$  and a static logarithmic utility function.
- (a) Transform the problem into a calculus of variations problem and determine the Euler-Lagrange equation.
  - (b) Solve the problem.



**Mathematical Economics**

**Exam – 30/01/08 Duration: 3h00**

NOTE: Answer each group in separate sheets. Justify clearly all answers

**I**

1. **(2,0)** Study the definiteness of matrix  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

2. **(2,0)** Using the chain rule, compute  $\frac{\partial z}{\partial t}$ , at  $t = 0$  for:

$$z(t, x, w) = \frac{5t^2 + 3x}{2w^2}, x(t) = t^2 + 1, w(t) = e^t + 1.$$

3. **(3,0)** Consider the following problem:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} U &= x^2 + (y - x)^2 \\ \text{s.t. } x - 2y &= b \end{aligned}$$

- Solve the minimization problem.
- Construct the function  $U^*(b)$  consisting on the maximum value of  $U$  for each  $b$ .
- Compute  $U^{*'}(b)$  and relate this value to the Lagrange multiplier. Justify carefully your answer.

**II**

1. **(3.5)** Consider the following two sets  $A$  and  $B$  of points of  $R^2$

$$\begin{aligned} A &= [01] \times [a 5] \\ B &= \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \end{aligned}$$

(“ $\times$ ” means Cartesian product of the two intervals and  $a$  is unknown)

- Find the set of values of  $a$  that assures the existence of a hyperplane separating  $A$  and  $B$ . Justify
- Choose one value for  $a$  and find one of those hyperplanes for that value of  $a$ .

2. **(3.5)** Consider the following correspondence, where  $\varphi(x)$  are sets corresponding to each  $x$ .

$$a) -1 \leq x < 0 \quad \varphi(x) = \{(x+2)/3\}$$

$$b) x = 0 \quad \varphi(x) = [-13]$$

$$c) 0 < x \leq 4 \quad \varphi(x) = \{(x-1)/3\}$$

Show that the theorem of Kakutani can be used to assure the existence of a fixed point. Find a fixed point.

### III

1. **(2.0)** Consider the ode  $\dot{y} = -1 + \lambda y$  where  $\lambda > 0$ .
- Solve the differential equation.
  - Consider the terminal condition  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} y(t) = 0$ . Solve the terminal value problem.
2. **(2.0)** Let  $y_t \in \mathbb{R}^2$  and consider the planar difference equation  $y_{t+1} = Ay_t + B$  for  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$ , where  $B = (1, 0)$ .
- Solve the difference equation;
  - Assume that  $y_{1,0} = 3/15$  and that  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{2t} = \bar{y}_{2t}$ , where  $\bar{y}_{2t}$  is the steady state level for  $y_{2t}$ . Determine the solution of the initial-terminal value problem.
3. **(2.0)** Assume that a consumer has an endowment  $W(t)$  at time  $t \in [0, T]$ , where  $T$  is finite. He/she wants to consume it totally until time  $t$ , such that  $W(T) = 0$ . The endowment accumulates according to the equation  $\dot{W} = C(t) - rW(t)$  where  $r > 0$  and is constant. Initially  $W(0) = \phi > 0$ . The consumer has a psychological rate of time preference  $\rho > 0$  and a static logarithmic utility function.
- Determine the first order conditions from the Pontryagin's maximum principle.
  - Solve the problem.



Economia Matemática

Exame – 07/01/09 Duração: 2h30

NOTA: Responda a cada grupo em folhas separadas. Justifique claramente todas as respostas.

Grupo I (5 val)

1. Considere a matriz  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ .

- (a) (2.0 val.) Calcule a inversa da matriz  $B$ .
- (b) (3.0 val.) Proceda à diagonalização da matriz  $B$ . Calcule  $B^3$ .

Grupo II (7 val)

1. (4.0 val) Considere a seguinte correspondência de  $[0, 5]$  em  $[0, 5]$  :

$$\begin{aligned} 0 \leq x < 2 & \varphi(x) = \{x + 0, 2; x + 0, 4\} \\ x = 2 & \varphi(x) = [a, b] \\ 2 < x \leq 5 & \varphi(x) = \{x - 1\} \end{aligned}$$

- (a) (2.0 val) Indique, **justificando** a resposta, dois valores possíveis para  $a$  e  $b$  que garantam que a correspondência é semicontínua superior em todos os pontos de  $[0, 5]$ .
- (b) (2.0 val) Nesse caso pode ser utilizado o teorema de Kakutani para provar a existência de um ponto fixo? **Justifique**.  
NOTE BEM : O símbolo  $\{u; v\}$  representa o conjunto de dois elementos,  $u$  e  $v$  e não o intervalo de extremidades  $u$  e  $v$ .

2. (3.0 val) Considere um espaço  $R^2$  e os seguintes conjuntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$

$$\begin{aligned} A &= [1, 3] \\ B &= (0, 5) \\ C &= \{(x, y) \text{ de } R^2 \text{ tais que } (x - 4)^2 + (y - 3)^2 \leq r^2\} \\ D &= A \times B \end{aligned}$$

- (a) (1.5 val) Indique um valor de  $r$  que permita garantir que existe um hiperplano a separar  $C$  de  $D$ .

- (b) (1.0 val) Indique as razões que lhe permitem justificar a resposta à questão anterior.
- (c) (0.5 val) Apresente a equação de um hiperplano separador.

NOTE BEM: O símbolo “ $\times$ ” representa o produto cartesiano de conjuntos e  $(a, b)$  representa o intervalo aberto de extremidades  $a$  e  $b$ .

### Grupo III (8 val.)

1. (2.0 val) A taxa de rendimento de uma acção, é igual à taxa de variação da sua cotação,  $\dot{p}/p$ , mais o ratio entre o dividendo e a cotação,  $d/p(t)$ . Em equilíbrio, com ausência de oportunidades de arbitragem e previsão perfeita, a taxa de rendimento da acção deverá ser igual à taxa de juro do mercado,  $r$ , que se admite constante.
- (a) Escreva e resolva a equação diferencial ordinária para a cotação da acção. Forneça uma ilustração geométrica.
- (b) Excluem-se bolhas especulativas se se admitir que  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)e^{-rt} = 0$ . Qual seria a expressão para a cotação, em função de  $t \in [0, \infty)$ , se aquela hipótese se verificar? Interprete os resultados obtidos.
2. (3.0 val) Considere a equação às diferenças planar  $y_{t+1} = Ay_t + B$ , em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Resolva a equação às diferenças (sugestão: Considere separadamente os casos  $b = 0$  e  $b \neq 0$ ).
- (b) Desenhe o diagrama de fases.
3. (3.0 val) Admita que um consumidor tem uma dotação, cuja quantidade no início do período  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$  é designada por  $W_t$ , com  $T$  finito. A dotação evolui de acordo com a equação  $W_{t+1} = (1+r)W_t - C_t$ , em que  $C_t$  é a quantidade consumida ao longo do período  $t$ , e  $r > 0$  é um parâmetro. Admita que  $W_0 = \phi > 0$  e que o consumidor pretende ter a dotação final  $W_T = \phi$ . O consumidor quer determinar uma trajectória óptima para a dotação, usando uma função de utilidade intertemporalmente aditiva, em que a função de utilidade para o período  $t$  é  $\ln(C_t)$ , e há um factor de desconto psicológico igual a  $\beta \in (0, 1)$ .
- (a) Exprima o problema como um problema de cálculo das variações, e escreva as condições de primeira ordem.
- (b) Determine a solução do problema.



Instituto Superior de Economia e Gestão  
Mestrado em Economia Monetária e Financeira e Mestrado em Economia

**Economia Matemática**

**Exame – 27/01/09 Duração: 2h30**

NOTA: Responda a cada grupo em folhas separadas. Justifique claramente todas as respostas.

**Grupo I (5.0 valores)**

- (2.0 val.) Considere a função  $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ . Suponha que  $x$  e  $y$  são função de  $t$ :  $x(t) = \frac{1}{2}t^2$ ,  $y(t) = \ln(t)$ . Calcule a derivada  $\frac{\partial f}{\partial t}$ .
- (3.0 val.) Determine se a função  $f(x, y) = x^2y$  é côncava ou convexa no domínio  $\{x > 0, y > 0\}$ .

**Grupo II (7.0 valores)**

- (4.0 val.) Considere o seguinte intervalo  $A$  de  $R$ ,  $A = [0, 1]$  e também a função real definida sobre  $A$ ,  $f(x) = ax/(x+1)$ 
  - (3.0 val.) Determine o conjunto de todos os valores de  $a$  que permitem garantir, através da aplicação do teorema do ponto fixo de Brouwer, a existência de um ponto fixo de  $f$  em  $A$
  - (1.0 val.) Suponha agora que  $A = [0, 0,5] \cup [0,7, 1]$  e que  $a$  toma o valor  $a = 0,5$ . Continuará a ser aplicável o teorema de Brouwer? Justifique.
- (3.0 val) Sejam os seguintes conjuntos  $A$  e  $B$  de  $R^2$

$$A = \{(x, y) : 2x + 3y \leq 1\}$$
$$B = \{(x, y) : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$

Diga, justificando, se podemos usar o Teorema do Hiperplano Separador para provar a existência de um hiperplano a separar  $A$  de  $B$ .

**Grupo III (8.0 valores)**

- (3.0 val.) Considere a equação diferencial ordinária planar  $\dot{y} = Ay + B$ , em que

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Determine a solução da equação diferencial.
- Desenhe o diagrama de fases e discuta o resultado obtido.
- Seja  $y(0) = (0, 0)$ . Resolva o problema de valor inicial.



2. (2.0 val.) Considere a equação às diferenças  $y_{t+1} = -3/2y_t - 1/2$ .
- (a) Determine a sua solução e caracterize-a.
  - (b) Seja  $y_0 = 0$ . Resolva o problema de valor inicial. Desenhe o diagrama das iterações (*iteration map*).
3. (2.0 val.) Admita que um consumidor tem um recurso, cuja quantidade no início do período  $t \in \{0, 1, \dots, \infty\}$  é designada por  $W_t$ . A dotação é consumida na quantidade  $C_t$  ao longo do período  $t$ . A dotação inicial é  $W_0 = \phi > 0$ . O consumidor quer determinar uma trajetória ótima para a dotação, que se admite assumir valores não negativos assintoticamente, usando uma função de utilidade intertemporalmente aditiva, em que a função de utilidade para o período  $t$  é isoelástica,  $\frac{1}{1-\sigma}(C_t)^{1-\sigma}$ , com  $\sigma > 0$  e um factor de desconto psicológico igual a  $\beta \in (0, 1)$ .
- (a) Exprima o problema como um problema de controle ótimo e escreva as condições de ótimo de primeira ordem segundo o princípio de Pontryagin's.
  - (b) Determine a solução do problema.

Exame da Época Normal 2009/2010  
Economia Matemática  
Mestrado em Economia Monetária e Financeira

Duração: 2h30

Responda a cada grupo em folhas de ponto separadas. Não são permitidas calculadoras gráficas, nem telemóveis.

Bom Trabalho

Grupo I

1. (4 valores) Seja  $f : R^n \rightarrow R$  dada por:

$$f(x_1, x_2) = \log(x_1^\alpha x_2^\alpha)$$

com  $\alpha > 0$ .

- (a) (1 valor) Como se define, sem recurso a diferenciabilidade, uma função côncava?
- (b) (3 valores) Mostre que a função  $f$  é côncava.
2. (3 valores) Determine o máximo e o mínimo de  $f(x, y) = x^2 - y^2$  no círculo unitário,  $x^2 + y^2 = 1$ , usando o método de Lagrange. Resolva o mesmo problema usando o método de substituição. Obtém os mesmos resultados? Porquê, ou porque não?

Grupo II

1. (3,5 valores) Considere a seguinte correspondência  $\varphi$  definida em  $S = [2, 10] \subset R$ :

$$\begin{aligned} 2 &\leq x < 5 & \varphi(x) &= \{x + 2\} \\ x &= 5 & \varphi(x) &= [a, b] \cup [c, 8] \\ 5 &< x \leq 10 & \varphi(x) &= [x - 3, x - 1] \end{aligned}$$

- (a) (3 valores) Indique três valores, um para cada um dos números  $a$ ,  $b$  e  $c$ , que permitam aplicar o teorema do ponto fixo de Kakutani. Justifique.
- (b) (0,5 valores) No caso anterior, calcule um ponto fixo.
2. (3,5 valores) Considere os seguintes conjuntos  $A$  e  $B$  de  $R^2$ :

$$\begin{aligned} A &= [0, 2] \cup (a, 4] \times [1, 3] \\ B &= \{(x, y) \in R^2 : y \geq b - x\} \end{aligned}$$

(o símbolo “ $\times$ ” representa o produto cartesiano de conjuntos)

- (a) (3 valores) Indique o menor valor de  $a$  e um valor para  $b$  que permitam garantir que existe uma recta a separar os conjuntos A e B. Justifique.
- (b) (0,5 valores) No caso anterior, apresente a equação de uma dessas rectas.

### Grupo III

1. (1 valor) Considere a equação  $y_{t+1} = \alpha y_t - 1$ , para  $\alpha > 0$ .
  - (a) (0,5 valores) Determine a solução da equação às diferenças para os diferentes valores de  $\alpha$ .
  - (b) (0,5 valores) Admita a condição terminal  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha^{-t} y_t = 0$ . Discuta a existência e unicidade de soluções para o problema de valor terminal. Determine a solução do problema, caso exista.

2. (2 valores) Considere a equação planar

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= (1 + \alpha)k_t - \alpha h_t + c + (1 - \gamma)k_t \\ h_{t+1} &= -\beta k_t + (1 + \beta)h_t + c + (1 - \gamma)h_t \end{aligned}$$

em que  $c > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$  e  $0 < \beta < 1$ .

- (a) (1 valor) Faça uma representação matricial e determine os valores próprios da matriz dos coeficientes de  $(k_t, h_t)$ .
  - (b) (1 valor) Obtenha o diagrama de bifurcação no espaço  $(\gamma, \alpha + \beta)$ , indicando os tipos de diagramas de fases que poderão existir.
3. (3 valores) Considere o problema de controle óptimo:  $\max_{\{u\}} \sum_{t=0}^3 y_t - (2 - u_t)^2$  sujeito a  $y_{t+1} = 1/2(y_t - u_t)$  e a  $y_0 = 0$  e  $y_4 = 45/2$ .
    - (a) (1 valor) Escreva as condições de primeira ordem segundo o princípio de Pontryagin.
    - (b) (2 valores) Resolva o problema, ou seja, obtenha as sequências óptimas  $\{y_t^*\}_{t=0}^4$  e  $\{u_t^*\}_{t=0}^4$ .

Exame da Época de Recurso 2009/2010  
Economia Matemática  
Mestrado em Economia Monetária e Financeira

Duração: 2h30

Responda a cada grupo em folhas de ponto separadas. Exames que não respeitam esta condição não serão corrigidos. Não são permitidas calculadoras gráficas, nem telemóveis.

Bom Trabalho!

**Grupo I**

1. (4 valores) Considere o problema de maximização:

$$\max_{x,y} f(x,y) = x^3 + y^3 \quad s.a. \quad x + y = 1$$

- (a) (2 valores) Mostre que o problema não tem solução e discuta este resultado à luz do Teorema de Weierstrass.
- (b) (2 valores) Mostre que, se o Método de Lagrange fosse utilizado, os pontos críticos da Lagrangeana teriam uma solução única. Determine se este ponto seria um máximo ou um mínimo global.
2. (3 valores) Considere o seguinte problema de minimização:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} (x-1)^2 + (y-2)^2, \quad s.a. \\ 4 &\geq 2y + x, \\ 20 &\geq 3y + 10x, \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Verifique que no óptimo existe apenas uma restrição activa, nomeadamente a primeira.

## Grupo II

1. (3,5 valores) Considere uma economia competitiva em que se trocam dois bens, 1 e 2 e para os quais se conhecem as respectivas funções de procura ( $D_i$ ) e oferta ( $S_i$ ):

Bem 1:

$$\begin{aligned}D_1 &= p_2 - p_1^2 p_2 \\S_1 &= \alpha p_1 p_2^2 - p_2^2 + p_1 p_2\end{aligned}$$

Bem 2:

$$\begin{aligned}D_2 &= p_1^3 - p_1 p_2 - p_1 \\S_2 &= 3p_1^2 p_2 - p_1^2\end{aligned}$$

- (a) (2 valores). Determine o valor de  $\alpha$  que permite calcular o vector de preços de equilíbrio.
- (b) (1,5 valores) Verifique que, para esse valor,  $p_1 = 0,842$  e  $p_2 = 0,158$  são, aproximadamente, preços de equilíbrio e calcule o valor do erro de aproximação para cada um dos mercados.
2. (3,5 valores) Considere a seguinte correspondência  $\varphi$  definida no intervalo  $[0,5 \ 2]$  de  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}0.5 &\leq x < 1, \varphi(x) = \{1, 5x\} \\x &= 1, \varphi(1) = [a \ b] \\1 &< x \leq 2, \varphi(x) = [x - 0.5 \ x - 0.4]\end{aligned}$$

- (a) (3 valores) Indique um valor para  $a$  e outro para  $b$  que permitam aplicar o Teorema de Kakutani para provar a existência de um ponto fixo da correspondência.
- (b) (0,5 valores) Com esses valores, calcule um ponto fixo.

### Grupo III

1. (1 valor) Considere a equação  $y_{t+1} = -1/2y_t + 3/2$ .
- (a) (0,5 valor) Determine a solução da equação às diferenças e caracterize-a.
- (b) (0,5 valor) Seja  $y_0 = -1$ . Resolva o problema de valor inicial. Desenhe o diagrama das iterações (*iteration map*).

2. (2 valores) Considere a equação às diferenças planar  $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_t$ , em que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) (1,5 valores) Determine a solução da equação às diferenças. Caracterize-a qualitativamente.
- (b) (0,5 valor) Suponha que  $\mathbf{y}_0 = (1, -1)^\top$ . Obtenha a solução do problema de valor inicial.
3. (3 valores) Considere o seguinte problema de investimento óptimo para uma empresa: determinação da sequência de investimento,  $\{I_t\}_{t=0}^\infty$ , que maximiza o funcional objectivo  $\sum_{t=0}^\infty (1+r)^{-t}\pi_t$ , onde  $r > 0$  é taxa de juro de mercado. O *cash flow* no período  $t$  é denotado por  $\pi_t = AK_t - I_t(1 + \xi I_t)$ , em que  $K_t$  representa o stock de capital, e  $A > 0$  e  $\xi > 0$  são parâmetros de produtividade e de custo de investimento, respectivamente. O problema tem como restrições, a equação de acumulação do stock de capital  $K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t$ , em que  $\delta \in [0, 1)$  é a taxa de depreciação do capital, e o stock de capital inicial é dado por  $K_0 = \phi > 0$ . Suponha que  $A > r + \delta$ .
- (a) (1 valor) Exprima o problema como um problema de cálculo de variações e determine as condições de primeira ordem de óptimo.
- (b) (2 valores) Determine a solução do problema como uma função explícita para  $K_t$ . Justifique e forneça uma intuição económica para a solução que obteve.





Instituto Superior de Economia e Gestão  
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Economia Matemática

Ano Lectivo de 2010/2011 – Exame da Época Normal

Duração: 2h30

Antes de iniciar o teste, tenha em atenção os seguintes aspectos:

- Não é permitida a consulta de qualquer material de apoio, nem de calculadoras gráficas;
- Desligue e arrume o telemóvel;
- Responda a cada um dos 3 **grupos** de questões em folhas separadas e correctamente identificadas;
- Apresente todos os cálculos que efectuar e não apenas os resultados finais;
- Justifique todas as suas respostas

#### Grupo I

1. (6,5 valores) Seja  $W(x, y, z)$  a função que representa a relação entre a produção de  $x$ ,  $y$  e  $z$  e o bem estar social. O objectivo deste problema é obter o bem estar social máximo dadas as restrições existentes na economia para a produção de  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Nomeadamente:

$$\begin{aligned} \max_{x,y,z} W(x, y, z) &= a \log x + b \log y + c \log z, \text{ s.a.} \\ 2x + y + 3z &\leq 600 \\ x + 2y + z &\leq 550 \\ 1 &\leq x, 1 \leq y \text{ e } 1 \leq z \end{aligned}$$

Sendo os parâmetros  $a, b, c > 0$ .

- (a) (0,5 valor) Defina as funções  $h_i(x, y, z), i = 1, \dots, 5$  que representam as restrições deste problema para que o Teorema de Kuhn-Tucker possa ser utilizado.
- (b) (2 valores) Seja o conjunto  $D$  definido por

$$D = \{(x, y, z) : h_i(x, y, z) \geq 0, i = 1, \dots, 5\}.$$

- i. O conjunto  $D$  é compacto? Justifique.
- ii. A função  $W$  tem um máximo no conjunto  $D$ ? E um mínimo? Justifique.

- (c) (1 valor) Escreva as condições de primeira ordem do teorema de Kuhn-Tucker que têm de ser resolvidas para que se obtenha um ponto de máximo de  $W$  no conjunto definido pelas restrições.
- (d) (1 valor) Escreva as condições de complementariedade do Teorema de Kuhn-Tucker deste problema.
- (e) (2 valores) Suponha que o ponto óptimo do problema ocorre quando  $(x, y, z) = (50, 200, 100)$ . Mostre que o teorema de Kuhn-Tucker se pode aplicar neste caso.

### Grupo II

1. (2,5 valores) Considere a seguinte economia de troca em que existem só dois bens: 1 e 2. As funções de oferta ( $S$ ) e procura ( $D$ ) de cada bem são, respectivamente:

Para o bem 1:

$$\begin{aligned} S_1 &= 4p_1p_2^2 - p_1g(p_2) \\ D_1 &= 4p_1p_2^2 - 3p_1^2p_2 \end{aligned}$$

Para o bem 2:

$$\begin{aligned} S_2 &= -p_1p_2 + p_1^2p_2 \\ D_2 &= -p_1p_2 + 3p_1^3 \end{aligned}$$

Encontre a expressão analítica da função  $g(p_2)$  que permite garantir a existência de um vector de preços de equilíbrio de Walras e calcule esse vector.

2. (4 valores) Seja a seguinte correspondência:

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] &\rightarrow 2^{[0, 1]} \\ \varphi(x) &= \begin{cases} \left(\frac{2-x}{2}\right), & \text{Para } 0 \leq x < 0,5 \\ [a, b], & \text{Para } x = 0,5 \\ \left(\frac{1}{0,7+x}\right), & \text{Para } 0,5 < x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Indique o maior valor de  $a$  e o menor valor de  $b$  que permitem garantir a existência de um ponto fixo através do teorema de Kakutani. Determine esse ponto e prove que, neste exercício, ele é único.

### Grupo III

1. Considere uma economia descrita pelas seguintes equações: (1) uma função de produção  $Y_t = AK_t$ , em que  $Y_t$  é produção,  $K_t$  é o stock de capital e  $A$  é um parâmetro de produtividade; (2) uma função poupança Keynesiana,  $S_t = sY_t$ , em que  $0 < s < 1$  é a propensão marginal a poupar; (3) uma função investimento,  $I_t = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$  em que  $0 < \delta < 1$  é a taxa de depreciação do capital; e (4) a equação de equilíbrio  $S_t = I_t$ . Admita que o nível inicial do stock de capital,  $K_0 > 0$ , é conhecido.

- (a) Obtenha uma equação às diferenças escalar em  $K_t$ .
- (b) Resolva o problema de valor inicial associado.
- (c) Caracterize a solução. Faça uma representação geométrica.
2. Considere a equação às diferenças planar  $y_{t+1} = Ay_t$  com
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix}, 0 < a < 1$$
- (a) Determine a solução geral da equação planar
- (b) Desenhe o diagrama de fases. Comente os resultados obtidos.
3. Considere o problema de cálculo das variações  $\max_y \sum_{t=0}^T -(y_{t+1} - 2y_t)^2$  com  $y_0 = 1$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = 0$ .
- (a) Obtenha a condição de Euler-Lagrange;
- (b) Obtenha a solução do problema.

itbpF2.1871in0.6045in0inFigure  
Economia Matemática  
Ano Lectivo de 2010/2011 – Exame da Época de Recurso  
Duração: 2h30

Antes de iniciar o teste, tenha em atenção os seguintes aspectos:

- Não é permitida a consulta de qualquer material de apoio, nem de calculadoras gráficas;
- Desligue e arrume o telemóvel;
- Responda a cada um dos 3 **grupos** de questões em folhas separadas e correctamente identificadas;
- Apresente todos os cálculos que efectuar e não apenas os resultados finais;
- Justifique todas as suas respostas

Grupo I

1. (6,5 valores) Considere a função

$$f(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$$

definida em  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$ .

- (a) (1,5 valor) Determine o(s) ponto(s) críticos da função no interior do domínio definido. (dica: no óptimo, teremos  $x^* = y^*$ )
- (b) (0,5 valor) Determine o(s) ponto(s) crítico(s) da função  $g(x) = f(x, 0)$ ,  $x \geq 0$ , i.e. ao longo da fronteira  $y = 0$ . Classifique o(s) ponto(s) crítico(s) de  $g(x)$ .
- (c) (0,5 valor) Determine e classifique o(s) ponto(s) crítico(s) de  $h(y) = f(0, y)$ ,  $y \geq 0$ , i.e. ao longo da fronteira  $x = 0$ . Classifique o(s) ponto(s) crítico(s) de  $h(y)$ .
- (d) (1,5 valores) Compare as soluções obtidas em **b**, **c** e **d** em termos do valor da função. Analise ainda o ponto  $f(0, 0)$ . Explique a necessidade desta análise.

(e) (3,0 valores) Considere agora o seguinte problema:

$$\max_{x,y} f(x,y) \text{ s.a. } x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq \frac{3}{4}$$

- i. (1,0 valor) Apresente as condições de primeira ordem e de complementariedade do teorema de Kuhn-Tucker aplicado a este problema.
- ii. (1,5 valor) Verifique se existe uma solução em que apenas a restrição  $x + y \leq \frac{3}{4}$  é activa.

### Grupo II

1. (2,5 valores) Considere a seguinte economia de troca em que existem só dois bens: 1 e 2. As funções de oferta ( $S$ ) e procura ( $D$ ) de cada bem são, respectivamente:

Para o bem 1:

$$\begin{aligned} S_1 &= f(p_1, p_2) + p_1 g(p_1, p_2) \\ D_1 &= f(p_1, p_2) + 2p_1 p_2 \end{aligned}$$

Para o bem 2:

$$\begin{aligned} S_2 &= h(p_1, p_2) + 2p_1^2 \\ D_2 &= h(p_1, p_2) + p_1 \end{aligned}$$

Encontre as condições que permitem garantir a existência de um vector de preços de equilíbrio de Walras e calcule esse vector.

2. (4 valores) Seja um espaço  $\mathbb{R}^2$  e os seguintes conjuntos do espaço:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ B &= [0, 5] \times [0, 5] \end{aligned}$$

em que  $\times$  é o símbolo de produto cartesiano de conjuntos, e

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : k - y \leq x\}.$$

Considere ainda o conjunto

$$D = A \cap B$$

Indique, caso exista, um valor de  $k$ , que seja menor que 2 e que permita garantir a existência de um hiperplano a separar  $D$  e  $C$ . Justifique detalhadamente.

Sugestão: represente graficamente os conjuntos envolvidos.

### Grupo III

1. (1,5 valores) Considere a equação  $y_{t+1} = -\frac{1}{2}y_t + 2$ .
  - (a) (0,5 valor) Determine a solução da equação às diferenças.
  - (b) (0,5 valor) Desenhe o gráfico de iterações.
  - (c) (0,5 valor) Admita a condição terminal  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_t = \bar{y}$  em que  $\bar{y}$  é o equilíbrio estacionário. Discuta a existência e unicidade de soluções para o problema de valor terminal. Determine a solução do problema, caso exista.
  
2. (2 valores) Considere a equação às diferenças planar  $y_{t+1} = Ay_t$  em que

$$A = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- (a) (1 valor) Determine a solução da equação às diferenças.
  - (b) (1 valor) Desenhe o diagrama de fases e caracterize o comportamento dinâmico do modelo.
3. (3,5 valores) Seja o problema do consumidor com a função objectivo

$$\max_{C_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \text{ sujeito a,}$$
$$W_{t+1} = (1-\delta)W_t - C_t, \quad W_0 = \phi > 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} W_t \geq 0$$

Suponha que  $\sigma > 0$ ,  $0 < \beta < 1$  e  $0 < \delta < 1$  e que  $\beta^{\frac{1}{\sigma}} < (1-\delta)^{1-1/\sigma}$ .

- (a) (1 valor) Escreva as condições de primeira ordem segundo o princípio de Pontryagin. Represente o sistema canónico como uma equação às diferenças planar em  $(C; W)$ .
- (b) (2,5 valores) Resolva o problema, ou seja, obtenha as sequências óptimas  $\{W_t^*\}_{t=0}^{\infty}$  e  $\{C_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ . Comente os resultados obtidos.



**Economia Matemática**

1º Semestre 2011/2012

**EXAME DE ÉPOCA NORMAL**

**3 Janeiro 2012**

*Duração máxima: 2 horas*

**Resolva cada parte do exame numa folha separada**

PARTE I

- (1) Suponha uma economia em que se trocam dois bens (bem 1 e bem 2) com, respectivamente, as seguintes funções de procura e oferta dependentes dos preços:

Bem 1

$$D_1 = a(p_1/p_2)^{1/2} + p_1^2 \quad S_1 = -p_1 p_2^2 + p_1^2$$

Bem 2

$$D_2 = b p_1 (p_1/p_2)^{1/2} + p_2 \quad S_2 = p_2 + p_1^2 p_2.$$

Sabendo que  $a - b = 0,8$ , calcule os valores de  $a$  e de  $b$  que permitem, a priori, garantir que existe um vector de preços de equilíbrio no sentido de Walras. (2 valores)

- (2) Considere um mercado onde existem  $n$  agentes ligados em rede e em que cada agente comunica com todos os outros, seja directamente seja indirectamente (isto é, através de outro agente). Se cada agente comunica com outro, esse outro comunica com o primeiro. Se um agente  $i$  comunica directamente com um outro agente  $j$  diz-se que deu um passo na comunicação. Por convenção, o número de passos de  $i$  para  $i$  é 0.

(a) Prove que a função  $d(i, j) = N$ , sendo  $N$  o número mínimo de passos que o agente  $i$  dá para comunicar com o agente  $j$ , é uma distância definida no conjunto de todos os pares  $(i, j)$  para todos os agentes  $i$  e  $j$ . (2 valores)

(b) Se a rede é tal que cada agente só comunica directamente com cinco outros agentes, diga quais são os elementos de cada esfera aberta de raio 2 e centro em cada agente  $i$ . (1 valor)

## PARTE II

- (1) Considere o seguinte problema:

$$\max f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$$

$$\text{sujeito a } x + 2y \leq 11$$

$$x, y \geq 0$$

- (a) Enuncie o teorema de Weierstrass e explique se esse teorema pode ser usado na resolução do problema. (1 valor)
- (b) Resolva o problema utilizando o teorema de Kuhn-Tucker. Explique claramente o seu raciocínio e todos os passos que efectuar. (4 valores)

## PARTE III

- (1) Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = x - x^3.$$

- (a) Encontre todos os seus pontos de equilíbrio. ( $\frac{1}{2}$  valor)
- (b) Determine se cada ponto de equilíbrio é estável, assintoticamente estável ou instável. (1 valor)
- (c) Desenhe o retrato de fases da equação. ( $\frac{1}{2}$  valor)

- (2) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcule a forma normal de Jordan  $J$  de  $A$ . (1 valor)
- (b) Determine a matriz exponencial  $e^{tJ}$ . ( $\frac{1}{2}$  valor)
- (c) Desenhe o retrato de fases da equação linear  $\dot{y} = Jy$ . (1 valor)
- (d) Encontre os pontos de equilíbrio de  $\dot{x} = Ax$ , e determine a sua estabilidade. ( $\frac{1}{2}$  valor)

## PARTE IV

- (1) Considere o problema de um agente cujo objectivo é maximizar a utilidade total descontada obtida a partir do seu consumo durante o intervalo de tempo  $[0, T]$ . Seja  $K(t)$  o capital acumulado por esse agente no instante  $t \in [0, T]$  e  $C(t)$  o seu consumo nesse mesmo instante de tempo. Suponha que:

- o horizonte temporal  $T > 0$  é finito,
- o agente tem um capital acumulado inicial  $K(0) = K_0$ ,
- o capital acumulado por esse agente satisfaz a equação diferencial

$$\dot{K}(t) = K(t) - C(t) ,$$

- as preferências do agente relativamente ao consumo são descritas pelo funcional

$$J[C(t)] = \int_0^T 2 \exp(-t) \sqrt{C(t)} dt .$$

Justifique convenientemente a sua resposta às seguintes questões.

- (a) Represente o problema descrito acima como um problema de cálculo de variações. (1 valor)
- (b) Determine uma condição necessária para a existência de uma solução  $C^2$  para o problema da alínea (a). (2 valores)
- (c) Assuma que existe uma solução  $C^2$  para a condição obtida na alínea (b). Mostre que tal solução é um maximizante do problema de cálculo de variações da alínea (a). (2 valores)

**Economia Matemática**

1º Semestre 2011/2012

**EXAME DE ÉPOCA DE RECURSO**

**24 Janeiro 2012**

*Duração máxima: 2 horas*

**Resolva cada parte do exame numa folha separada**

PARTE I

(1) Considere a seguinte correspondência definida no intervalo  $[0, 4]$ :

$$0 \leq x < 1 \quad \varphi(x) = \{2x^2\}$$

$$x = 1 \quad \varphi(1) = [0, 5m) \cup [1, 2]$$

$$1 < x < 4 \quad \varphi(x) = \{\sqrt{x}\}$$

$$x = 4 \quad \varphi(4) = [1, 3]$$

- (a) Determine o conjunto de todos os valores de  $m$  que permitem que se verifiquem as condições do teorema do ponto fixo de Kakutani e mostre que estão também reunidas todas as outras condições. (2 valores)
- (b) Escolha um dos valores de  $m$  e calcule todos os pontos fixos da correspondência. (1 valor)

(2) Considere uma economia em que se produzem  $n$  bens.

Os vectores  $X$  dos bens procurados satisfazem a condição  $X \geq A$  em que  $A$  é um vector não negativo. Os vectores  $Y$  dos bens produzidos satisfazem a condição  $0 \leq Y \leq B$  em que  $0$  é o vector nulo,  $B$  é um vector não negativo e  $A \geq B$ . Existe pelo menos uma componente  $i$  de  $B$ ,  $b_i$  tal que  $b_i < a_i$ .

Mostre que existe um vector de preços não negativo tal que, com esses preços, o valor total das quantidades produzidas nunca é superior ao valor total das quantidades procuradas, quaisquer que sejam as quantidades produzidas e procuradas. (2 valores)

(*Sugestão*: para demonstrar que o vector de preços é não negativo proceda por absurdo, supondo que o preço de um dos bens é negativo).

## PARTE II

- (1) Utilizando o teorema de Kuhn-Tucker, resolva o problema seguinte. Explícite claramente o seu raciocínio e todos os passos que efectuar.

$$\begin{aligned} \max f(x, y) &= x + y \\ \text{sujeito a } 2x + y &\leq 8 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

(5 valores)

## PARTE III

- (1) Considere a equação às diferenças:

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n).$$

- (a) Encontre todos seus pontos fixos. ( $\frac{1}{2}$  valor)  
 (b) Determine se cada ponto fixo é estável, assintoticamente estável ou instável. (1 valor)  
 (c) Trace os *stair-step diagrams* com quatro iterações e condições iniciais:  $x_0 = -1$  e  $x_0 = 0,25$ . ( $\frac{1}{2}$  valor)

- (2) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcule a forma normal de Jordan  $J$  de  $A$ . (1 valor)  
 (b) Determine a matriz exponencial  $e^{tJ}$ . ( $\frac{1}{2}$  valor)  
 (c) Desenhe o retrato de fases da equação linear  $\dot{y} = Jy$ . (1 valor)  
 (d) Encontre os pontos de equilíbrio de  $\dot{x} = Ax$ , e determine a sua estabilidade. ( $\frac{1}{2}$  valor)

## PARTE IV

- (1) Considere o problema de um agente cujo objectivo é maximizar a utilidade total descontada obtida a partir do seu consumo durante o intervalo de tempo  $[0, T]$ . Seja  $K(t)$  o capital acumulado por esse agente no instante  $t \in [0, T]$  e  $C(t)$  o seu consumo nesse mesmo instante de tempo. Suponha que:

- o horizonte temporal  $T > 0$  é finito,
- o agente tem um capital acumulado inicial  $K(0) = K_0$  e quer atingir o horizonte temporal  $T$  com um capital acumulado nulo,
- o capital acumulado pelo agente satisfaz a equação diferencial

$$\dot{K}(t) = K(t) - C(t) ,$$

- as preferências do agente relativamente ao consumo são descritas pelo funcional

$$J[C(t)] = \int_0^T 2 \exp(-t) \sqrt{C(t)} dt .$$

Justifique convenientemente a sua resposta às seguintes questões.

- (a) Represente o problema descrito acima como um problema de controlo óptimo. (1 valor)
- (b) Utilize o princípio do máximo de Pontryagin para caracterizar o par óptimo para o problema da alínea (a). (2 valores)
- (c) Utilize a condição do máximo obtida na alínea anterior para determinar o consumo óptimo em função da variável de estado e da variável adjunta. (1 valor)
- (d) Assuma que existe uma solução para o sistema Hamiltoniano alargado obtido na alínea (b). Mostre que tal solução determina um maximizante para o problema de controlo óptimo da alínea (a). (1 valor)



**Mathematical Economics**

1<sup>st</sup> Semester 2012/2013

**FIRST EXAM**

**8 January 2013**

*Maximum time length: 2 hours*

**Solve each part of the exam on a separable sheet**

PART I

- (1) Consider an exchange economy with two goods, 1 and 2 and the following demand ( $D_i$ ) and supply ( $S_i$ ) functions with normalized prices  $p_1 + p_2 = 1$ ,

$$D_1 = (p_1)^{-1}p_2 + k p_1 p_2 \quad S_1 = 2p_1 + p_1 p_2$$

$$D_2 = 2p_1^2(p_2)^{-1} \quad S_2 = 3p_1^2 p_2 + 1.$$

Find the value of  $k$  as a function of  $p_2$  for which we can be sure of the existence of equilibrium prices. (2 points)

- (2) Let  $A$  and  $B$  be two sets of  $\mathbb{R}^2$  such that  $A = C \cap D$  with

$$C = \{(x, y) : y = 2x + 1\}, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

and  $B = [2 \ 3] \times [5 \ 8]$  where  $\times$  denotes the “Cartesian product”. Is there at least a hyperplane separating  $A$  and  $B$ ? Why? Find one such hyperplane. (3 points)

## PART II

- (1) Consider the following problem:

$$\max f(x, y) = (2x + y)^2$$

$$\text{such that } x^2 + y \leq 16$$

$$x, y \geq 0$$

- (a) State the Weierstrass theorem and explain whether it can be used to help solve the problem above. (1 point)
- (b) Solve the problem above using the Kuhn-Tucker theorem. Explain carefully all the steps in your reasoning. (4 points)

## PART III

- (1) Suppose that  $1 < \lambda < 3$ , and let  $F(x) = \lambda x(1 - x)$ . Consider the difference equation

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

- (a) Compute the fixed points of  $F$  and plot them on the graph of  $F$ . (0.5 points)
  - (b) Determine the stability of the fixed points. (1 point)
  - (c) Pick a point  $x_0$  in the interval  $(0, 1)$  and let  $x_n$  be the solution of the difference equation above with initial condition  $x_0$ . Does the sequence  $x_n$  converge? if the answer is positive, what is its limit? Justify your answers. (1 point)
- (2) Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Compute the Jordan Normal Form  $J$  of  $A$ . (0.5 points)
- (b) Compute the exponential matrix  $e^{tJ}$ . (1 point)
- (c) Sketch the phase portrait of the linear equation  $\dot{y} = Jy$ . (1 point)

## PART IV

- (1) A firm wants to maximise the present value of its cash-flow selecting the optimal path of investment  $I = \{I_t\}_{t=0}^{T-1}$  by solving the problem:

$$\max_I \sum_{t=0}^{T-1} \left( \frac{1}{1+r} \right)^t (pK_t - (I_t)^2) \quad \text{subject to} \quad K_{t+1} = I_t - K_t$$

and  $K_0 = \phi > 0$  is given, where  $K_t$  is the stock of capital. The interest rate  $r$  and the output price  $p$  are positive parameters.

- (a) Transform into a calculus of variations problem and determine the first order conditions. (1 point)  
 (b) Solve the problem<sup>1</sup>. (2.5 points)

- (2) Consider the problem for an agent that wants to find the optimal path of consumption,  $(C(t))_{t \in [0, \infty)}$ , and financial wealth,  $(W(t))_{t \in [0, \infty)}$ , by solving the problem:

$$\max_C \int_0^{\infty} \left( B - \zeta e^{-\frac{C(t)}{\zeta}} \right) e^{-\rho t} dt, \quad \text{subject to} \quad \dot{W} = Y + rW(t) - C(t)$$

given  $W(0) = W_0$  and  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} W(t) \geq 0$ .

- (a) Write the Hamilton Jacobi Bellman (HJB) equation. (1 point)  
 (b) Determine the optimal policy function and find the equivalent HJB equation. (0.5 points)

---

<sup>1</sup>The general solution for the equation  $x_{t+2} = (1+a)x_{t+1} - ax_t + b$  is  $x_t = k_1 + k_2 a^t + b((1-a)t - b)/((a-1)^2)$ .

**Mathematical Economics**

1<sup>st</sup> Semester 2012/2013

**SECOND EXAM**

**January 28, 2013**

*Maximum duration: 2 hours*

**Answer each part in separate sheets**

PART I

(1) Let

$$f: x \mapsto f(x) = 0.4(x^2 - 2x + 1)$$

be a real function of real variable with domain  $S = [0, 1]$ . Knowing that any closed subset of a complete metric space is a complete metric space prove that there is one and only one fixed-point of  $f$  belonging to the set  $S$ . (2.5 points)

(2) Consider the following correspondence defined on the interval  $[0, 2]$  of  $\mathbb{R}$ :

$$0 \leq x < 1 \quad \varphi(x) = [x + 0.1, x + 0.3]$$

$$1 \leq x < 1.5 \quad \varphi(x) = [0.6, k]$$

$$1.5 \leq x \leq 2 \quad \varphi(x) = [x - 1, x]$$

Find the smallest value of  $k$  for which we can use the Kakutani theorem to prove the existence of at least one fixed-point of the correspondence. Find one fixed-point. (2.5 points)

## PART II

- (1) Consider the following problem:

$$\begin{aligned} \max f(x, y) &= [10 - (x + y)](x + y) - ax - (y + y^2) \\ \text{such that } x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

where  $a$  is a positive parameter.

- (a) Solve the problem using the Kuhn-Tucker theorem. Explain carefully all the steps in your reasoning. (4.5 points)
- (b) What economic decision making problem can the problem above represent? (0.5 points)

## PART III

- (1) Take your pocket calculator and perform the following experiment. Type any positive number  $x_0 > 0$  you like, and then press the button  $\sqrt{\phantom{x}}$ . Of course, you get  $\sqrt{x_0}$ . If you keep pressing  $\sqrt{\phantom{x}}$ , you will obtain a sequence of positive numbers  $x_0, x_1, x_2, \dots$ . Does the sequence  $x_n$  for  $n = 0, 1, 2, \dots$  have a limit? what is its value? Now, repeat the experiment with a different  $x_0$ . What do you get? Try to explain the outcome of your experiment by studying the difference equation  $x_{n+1} = F(x_n)$  with  $F(x) = \sqrt{x}$  and the initial condition  $x_0$ .
- (a) Why does the sequence  $x_n$  have a limit? (1 point)
  - (b) Compute the value of the limit. (0.5 points)
  - (c) Explain why the limit does not depend on the choice of  $x_0$ . (1 point)

- (2) Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Compute the Jordan Normal Form  $J$  of  $A$ . (0.5 points)
- (b) Compute the exponential matrix  $e^{tJ}$ . (1 point)
- (c) Sketch the phase portrait of the linear equation  $\dot{y} = Jy$ . (1 point)

## PART IV

- (1) Consider the following endogenous growth model:

$$\max_C \int_0^{\infty} \frac{1}{1-\sigma} C(t)^{1-\sigma} e^{-\rho t} dt, \text{ subject to } \dot{K} = Y(t) - C(t)$$

together with  $K(0) = K_0$  given and  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-At} K(t) \geq 0$ . The production function is linear  $Y(t) = AK(t)$  and the parameters verify:  $\rho > 0$ ,  $\sigma > 1$  and  $A > 0$ .

- (a) Write the first order conditions according to the maximum principle of Pontryagin. (2 points)
- (b) Solve the problem<sup>1</sup>. Under which conditions the solution displays unbounded growth? (2 points)
- (2) Consider the problem for an agent who wants to find the optimal path of consumption,  $\{C_t\}_{t=0}^{\infty}$ , and financial wealth,  $\{W_t\}_{t=0}^{\infty}$ , by solving the problem:  $\max_C \sum_{t=0}^{T-1} \left( B - \zeta e^{-\frac{C_t}{\zeta}} \right) \beta^t$  subject to  $W_{t+1} - W_t = rW_t - C_t$ , given  $W(0) = W_0$ .
- (a) Write the Hamilton-Jacobi-Bellman equation. (0.5 points)
- (b) Determine the optimal policy function. (0.5 points)

---

<sup>1</sup>Auxiliary results: the solution of differential equation  $\dot{x} = \lambda x(t) + f(t)$  is

$$x(t) = ke^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds$$

where  $k$  is an arbitrary constant.