Análise Matemática II

LISTA 5

(1) Mostre que a série de funções

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n-1}}\right)$$

converge em $[0,1]$ pontualmente mas não uniformemente.

(2) Considere a função $f(x) = e^x$.

(a) Calcule a sua série de Taylor em 0 e prove que é igual a f para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Aproveite o resultado provado na alínea anterior para mostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

(3) Escreva o desenvolvimento de Taylor em 0 das seguintes funções:

(a) $f(x) = a^x$, $a > 0$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$

(c) $f(x) = \arctan(x)$

(4) Seja $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{4}{3x}.$$

(a) Desenvolva f em série de potências de $(x-2)$, indicando o maior intervalo aberto em que o desenvolvimento é válido.

(b) Determine $f^{(17)}(2)$.

(5) Ler capítulo 2 de Campos Ferreira, *Introdução à Análise em* $\mathbb{R}^n$.

(6) Represente geometricamente os seguintes conjuntos e indique o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de cada:

(a) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = \dfrac{n}{2n+1},\ n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \le y + x \le 1\}$

(b) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x, y \in \mathbb{Q}\}$

(7) Determine o domínio de cada uma das seguintes funções, represente-o geometricamente e decida se é um conjunto aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(\dfrac{1}{1-\log(x^2+y^2)}, \sqrt{x-y}\right)$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{(2-\sin x)(y-x^2)}}{\log(x+y-2)}$

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \log(xy)\sqrt{1-x^2-(y-1)^2}$