Exercícios de Teoria da Probabilidade e Processos Estocásticos
Parte I

2013/2014

Exercício 1. Seja $(X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Mostre que

1. $X \in \mathcal{F}$.
2. se $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$ então $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.
3. se $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$ então $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.
4. se $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$ então $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$
5. se $A, B \in \mathcal{F}$ então $A \setminus B \in \mathcal{F}$.

Exercício 2. Mostre que a intersecção numerável de σ-álgebras é uma σ-álgebra. Será a união numerável de σ-álgebras também uma σ-álgebra?

Exercício 3. Seja $A \subset X$. Determine $\sigma(\{A\})$.

Exercício 4 (*)**.** Seja X um espaço topológico. Mostre que $\mathcal{B}(X) = \sigma$(fechados de X).

Exercício 5. Mostre que se A^c é numerável então A é Boreliano.

Exercício 6. Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Mostre que para qualquer $A, B \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset B$ tem-se $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Exercício 7. (**σ-subaditividade**) Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\mathcal{F}$. Mostre que

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

Exercício 8. Sejam μ_1 e μ_2 duas medidas do espaço mensurável $(X, \mathcal{F})$. Mostre que $\mu_1 + \mu_2$ definida por $(\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A)$ para todo o $A \in \mathcal{F}$ é uma medida de $(X, \mathcal{F})$.

Exercício 9. Considere um espaço de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e sejam $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$ tal que $\mu(A_1) < \infty$ e $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$. Mostre que

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) .$$

Exercício 10. Mostre que a condição $\mu(A_1) < \infty$ não pode ser retirada do enunciado do exercício anterior. (Dica: construa um contra-exemplo considerando um conjunto infinito X e a medida de contagem μ.)

Exercício 11. Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $A, B \subset X$ dois conjuntos. Mostre que são equivalentes

1. A é μ-equivalente a B.
2. existe um conjunto $N \subset X$ de medida nula tal que $A \cap N^c = B \cap N^c$.
3. existe $C \in \mathcal{F}$, $\mu(C) = 0$ tal que $B \setminus C \subset A \subset B \cup C$.

Exercício 12. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto finito ou numerável então A tem medida de Lebesgue nula.

Exercício 13. Considere a seguinte colecção de subconjuntos de $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{F} = \{E \subset \mathbb{R} : E \text{ é numerável ou } E^c \text{ é numerável}\} .$$

Mostre que:

1. $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra e $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra gerada pela colecção $\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$.
3. Encontre uma medida $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ tal que o conjunto vazio é o único conjunto de medida nula, ou seja, se $\mu(E) = 0$ então $E = \emptyset$.

Exercício 14 (Conjunto de Cantor)**.** Considere o intervalo $A_0 = [0, 1]$. Divida-o em três partes iguais e retire o intervalo aberto do meio. Obtém-se assim o intervalo $A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Repita o mesmo processo, agora para cada intervalo $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$, obtendo $A_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Continuando com a subdivisão, obtém-se uma sucessão de conjuntos $(A_n)_{n=0,1,2,\ldots}$. A intersecção

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n ,$$

é designada por conjunto de Cantor. Mostre que:

1. A_n é uma união disjunta de 2^n intervalos fechados.

2. C é não vazio e Boreliano.

3. C tem medida de Borel nula.

Exercício 15 (*). [Borel-Cantelli] Considere um espaço do medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ uma sucessão de conjuntos mensuráveis tais que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Mostre que o conjunto dos pontos de X que pertencem a um número infinito de A_n's tem medida nula, ou seja,

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 0\,.$$

Exercício 16 (*). Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de distribuição. Mostre que:

1. O conjunto dos pontos de descontinuidade de F é numerável.

2. Se F é contínua então $m_F(\{x\}) = 0$.

Exercício 17. Seja F uma função de distribuição continua. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto finito ou numerável então $m_F(A) = 0$.

Exercício 18. Dê um exemplo de uma função de distribuição F tal que $m_F(\{1\}) = 1$.

Exercício 19. Considere a função,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

1. Prove que F é uma função de distribuição.

2. Seja μ a medida de Borel-Stieltjes associada a F. Calcule $\mu(]3, 9])$.

Exercício 20. Considere a medida $\mu = 3\delta_2 + 2\delta_3$ em $\mathbb{R}$. Determine a função de distribuição F tal que $\mu = m_F$.

Exercício 21. Sejam Y e Z espaços topológicos e X um espaço mensurável. Se $f : X \to Y$ é uma função mensurável e $g : Y \to Z$ é uma função contínua então $g \circ f : X \to Z$ é uma função mensurável.

Exercício 22. Mostre que se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são duas funções mensuráveis então

1. $f + g$ é mensurável.

2. $f \cdot g$ é mensurável.

Exercício 23. Seja X um espaço topológico e $(X, \mathcal{B})$ o espaço mensurável onde $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel. Mostre que se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então f é mensurável.

Exercício 24. Dado $c \in \mathbb{R}$, mostre que a função constante $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma função mensurável.

Exercício 25. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e defina-se

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) > 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

a parte positiva e negativa de f, respectivamente. Mostre que f é mensurável sse f^+ e f^- são mensuráveis. (Dica: $f^+ = f \cdot \chi_E$ onde $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$)

Exercício 26. Mostre que se $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável então $|f|$ também é mensurável.

Exercício 27. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Dado $a \in \mathbb{R}$, mostre que o conjunto de nível $\{x \in X : f(x) = a\}$ é mensurável.

Exercício 28. Considere um espaço mensurável $(X, \mathcal{F})$ e um espaço topológico Y. Seja $f : X \to Y$ uma função mensurável. Prove que a colecção de conjuntos $\mathcal{C} = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ é uma σ-álgebra.

Exercício 29. Mostre toda a função simples é mensurável.

Exercício 30. Sejam φ, ψ funções simples e $a > 0$. Mostre que $\varphi + \psi$ e $a\varphi$ são funções simples.

Exercício 31. Calcule o integral de Lebesgue em $A \subset [0, \infty)$ relativo a m das seguintes funções simples:

1. $\phi(x) = [x]$ e $A = [0, 10]$.

2. $\phi(x) = [x^2]$ e $A = [0, 2]$.

Nota: o símbolo $[x]$ denota a parte inteira do número x.

Exercício 32. Sejam φ, ψ duas funções simples em X. Mostre que se $\varphi \leq \psi$ então $\int_E \varphi \, d\mu \leq \int_E \psi \, d\mu$ para todo conjunto mensurável E.

Exercício 33. Sejam $f, g : X \to [0, \infty]$ duas funções mensuráveis. Mostre que $f + g$ e $f \cdot g$ são funções mensuráveis de $X \to [0, \infty]$. (Dica: Use o facto de o limite de funções mensuráveis ser mensurável e qualquer função mensurável é o limite de funções simples).

Exercício 34 (*). Considere um espaço de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$, uma função mensurável $f : X \to [0, \infty]$ e $E \in \mathcal{F}$. Mostre que

$$\int_E f \, d\mu = \int_X \chi_E \cdot f \, d\mu \, .$$

Exercício 35 (Desigualdade de Markov). Considere um espaço de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e uma função mensurável $f : X \to [0, \infty]$. Mostre que para $\lambda \in]0, \infty[$,

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X f \, d\mu \, .$$

Exercício 36 (*). Sejam $f_n : X \to [0, \infty]$, $n = 1, 2, \ldots$ funções mensuráveis e

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \forall x \in X \, .$$

Mostr que,

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu \, .$$

(Dica: Considere em primeiro lugar uma soma finita e use o Teorema da convergência monótona.)

Exercício 37. Mostre que a função $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ definida por

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \, , \quad E \in \mathcal{F}$$

é uma medida. (Dica: Use as propriedades do integral de Lebesgue e o exercício anterior)

Exercício 38. Considere o espaço de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ onde μ é a medida de contagem. Seja $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ um subconjunto de X e $h : X \to [0, \infty]$ uma função mensurável. Mostre que

1. $\chi_A \cdot h$ é uma função simples, onde χ_A é a função característica de A.

2. Calcule $\int_A h \, d\mu$.

Exercício 39. Considere-se o espaço mensurável $(X, \mathcal{P}(X))$. Seja $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ um subconjunto numerável de X e $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ a seguinte função

$$\mu(E) = \sum_{x_i \in E} \alpha_i \,,$$

onde α_i, $i = 1, 2, \ldots$ são números reais não negativos. Mostre que

1. μ é uma medida, designada por medida discreta.
2. $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_{x_i}$ onde δ_{x_i} é a medida de Dirac.
3. Dada uma função mensurável $f : X \to [0, \infty]$,
$$\int_E f \, d\mu = \sum_{x_i \in E} f(x_i)\alpha_i \,.$$

Exercício 40 (*)**.** Considere um espaço de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e uma função mensurável $f : X \to [0, \infty]$. Mostre que se $\int_X f \, d\mu < \infty$ então $f(x) < \infty$ quase certamente.

Exercício 41. Calcule

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + nx^3} \, dx \,.$$

Exercício 42. Calcule

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \chi_{[0,n]} \, dm \,.$$

Exercício 43. Considere-se as seguinte medidas em $([0, 1], \mathcal{B})$: $\mu_1 = \delta_0$, $\mu_2 = m$ e $\mu_3 = \frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_2}{2}$. Para que $i \neq j$ se tem $\mu_i \ll \mu_j$? Determine a derivada no sentido de Radon-Nikodym em cada caso.

Exercício 44. Considere as seguintes medidas em $([0, 1], \mathcal{B})$: $\lambda = \delta_0 + m$ e $\mu = \delta_1 + m$. Determine:

1. A decomposição de Lebesgue de λ relativamente a μ, ou seja, o par (λ_a, λ_s) tal que
$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \text{onde} \quad \lambda_a \ll \mu \quad \text{e} \quad \lambda_s \perp \mu \,.$$
2. a derivada de Radon-Nikodym de λ_a relativamente a μ.

Exercício 45 (*)**.** Considere dois espaços mensuráveis $(X_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2$. Mostre que se F é um conjunto mensurável de $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ então a secção $F_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2\}$ é um conjunto $\mathcal{F}_2$-mensurável. (Dica: Mostre que a colecção $\mathcal{G} = \{F \in \mathcal{F} : F_{x_1} \in \mathcal{F}_2, \forall\, x_1 \in X_1\}$ é uma σ-álgebra que contém todos os rectângulos mensuráveis).