Análise Matemática III

LISTA 6

(1) Calcule o integral do campo vectorial X ao longo do caminho indicado:

(a) $X(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$, na curva $y = x^2$ entre $(-1,1)$ e $(1,1)$.

(b) $X(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, na curva $y = 1 - |1-x|$ entre $(0,0)$ e $(2,0)$.

(c) $X(x,y) = (2a - y, x)$, no caminho $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(d) $X(x,y) = (x+y, x-y)$, na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ numa volta no sentido anti-horário.

(e) $X(x,y,z) = (2xy, x^2 + z^2, y)$, num segmento de recta entre $(1,0,2)$ e $(3,4,1)$.

(f) $X(x,y,z) = (x, y, xz - y)$, no caminho $\gamma(t) = (t^2, 2t, 4t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

(2) Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z) = (y^2, 2xy + z, y + 5)$.

(a) Determine se F é o gradiente de uma função escalar $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

(b) Calcule $\int_\Gamma F \cdot d\gamma$ para o caminho $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ e a curva $\Gamma = \gamma([0,\pi])$.

(3) Esboce o caminho $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$, e calcule a sua massa se a densidade de massa ao longo da curva é dada por $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(4) Considere o caminho $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

Calcule:

(a) o comprimento da curva $\Gamma = \gamma([0,2\pi])$.

(b) o integral do campo vectorial $X(x,y,z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, 1)$ ao longo de Γ.

(5) Considere o caminho $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t, \sin t, t)$$

e o campo vectorial

$$X(x,y,z) = \left(-\frac{2x}{(x^2-y^2)^2}, \frac{2y}{(x^2-y^2)^2}, z^2\right).$$

(a) Mostre que X é o gradiente de uma função escalar.
(b) Calcule o integral do campo vectorial X ao longo de Γ.

(6) Considere a curva em $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 9x^2 + 4y^2 = 36\}.$$

Calcule o integral em Γ da função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{81x^2 + 16y^2}$.