Análise Matemática III

LISTA 7

(1) Decida se $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de Ω onde:
   (a) $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\Omega = \mathbb{R}^n$.
   (b) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}, \Omega\}$, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
   (c) $\mathcal{F} = \big\{\emptyset, \{0\}, \mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^-, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R}\big\}$, $\Omega = \mathbb{R}$.

(2) Seja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ uma σ-álgebra. Mostre que $\emptyset \in \mathcal{F}$ e que se $A_k \in \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{N}$, então $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{F}$.

(3) Seja Ω um conjunto finito com $\#\Omega = n$. Calcule $\#\mathcal{P}(\Omega)$. *Sugestão*: Estabeleça uma bijecção entre $\mathcal{P}(\Omega)$ e o espaço $\{v \in \mathbb{R}^n \colon v_i \in \{0,1\}\}$.

(4) (Medida de contagem) Considerando $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, mostre que a aplicação de contagem dos elementos de $A \in \mathcal{F}$:

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A, & \#A < +\infty \\ +\infty, & \text{c.c,} \end{cases}$$

é uma medida.

(5) Seja $\mu \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ a aplicação dada por

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(\mathbb{R}) = 2, \quad \mu(X) = 1 \quad \text{se} \quad X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset, \mathbb{R}\}.$$

Determine se μ é sub-aditiva numerável e aditiva numerável.

(6) Mostre que se μ_1, μ_2 são medidas e $\alpha, \beta \geq 0$, então $\mu = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2$ também é uma medida.

(7) Seja μ uma medida. Encontre uma fórmula para $\mu(A \cup B \cup C)$ em termos das medidas de cada um dos conjuntos e das suas intersecções.

(8) Seja μ uma medida numa σ-álgebra $\mathcal{F}$. Mostre que na definição de medida, a condição $\mu(\emptyset) = 0$ pode ser substituída pela existência de um conjunto $E \in \mathcal{F}$ com medida finita, $\mu(E) < +\infty$.

(9) * Seja uma medida μ numa σ-álgebra $\mathcal{F}$. Mostre que:
   (a) Se $A_k \in \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{N}$, tais que $A_k \subset A_{k+1}$, então $\mu(\bigcup_k A_k) = \lim \mu(A_k)$.
   (b) Se $A_k \in \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{N}$, tais que $A_{k+1} \subset A_k$ e $\mu(A_1) < +\infty$, então $\mu(\bigcap_k A_k) = \lim \mu(A_k)$.