Análise Matemática III

LISTA 9

(1) Indique se, para uma função mensurável f, o conjunto de nível $f^{-1}(\{a\})$ é mensurável para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

(2) Considere a σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue em $\mathbb{R}$. Determine se qualquer função monótona $f\colon A \to \mathbb{R}$ com $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, é mensurável.

(3) Seja $f\colon E \to \mathbb{R}$ limitada e mensurável à Lebesgue com $E \in \mathcal{M}$ tal que $m(E) < +\infty$. Considerando a função $\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\omega(x) = m\left(\{y \in E\colon f(y) > x\}\right),$$

determine:

(a) o contradomínio de ω.
(b) a monotonia de ω.
(c) se ω é uma função mensurável.
(d) $\lim_{x\to+\infty} \omega(x)$.
(e) $\lim_{x\to-\infty} \omega(x)$.
(f) $\lim_{x\to a^+} \omega(x)$.
(g) $\lim_{x\to a^-} \omega(x)$.
(h) se $m(f^{-1}(\{a\})) = 0$ implica que ω é contínua em a.

(4) Indique quais as funções simples e para essas calcule os seus integrais relativamente à medida de Lebesgue[1]:

(a) $f = \chi_{[1,+\infty[} + \chi_{]-\infty,-1[}$
(b) $f = 2\chi_{[0,+\infty[} - 3\chi_{]1,+\infty[}$
(c) $f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & x \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$
(d) $f(x) = \begin{cases} x, & x^{-1} \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$
(e) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1/2,\ 0 \le y \le 1 \\ -3, & 1/2 < x < 1,\ 0 \le y \le 1/2 \\ 2, & 1/2 < x < 1,\ 1/2 < y < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$
(f) $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k k^{-1} \chi_{]0,1/k[}$

[1]Note que $[x]$ é a parte inteira de x, i.e. $[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z}\colon k \le x\}$.

(g) $f(x) = [x]\chi_{[-100,100]}$
(h) $f(x,y) = ([x] + [y])\chi_{[0,2]\times[0,2]}(x,y)$
(i) $f(x,y) = \left(\left[\frac{3}{1+x}\right]\chi_{]0,2[}(y) - \left[\frac{2}{1+y}\right]\chi_{]0,3[}(x)\right)\chi_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[}(x,y)$

(5) Para $a \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, considere a medida de Dirac

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Prove que:

(a) δ_a é uma medida em $\mathbb{R}^n$.
(b) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\delta_a = \varphi(a)$ onde φ é uma função simples.
(c) $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\delta_a = f(a)$ onde $f \geq 0$.