Análise Matemática III

LISTA 10

(1) Demonstre as seguintes proposições para $f, g \in L^1(E, \mu)$ usando a definição de integral de Lebesgue:
   (a) Se $f \leq g$ q.t.p., então $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$.
   (b) Se $A \subset E$ com A mensurável, então $\int_A |f|\, d\mu \leq \int_E |f|\, d\mu$.
   (c) Se $\mu(A) = 0$, então $\int_A f\, d\mu = 0$.
   (d) Se A, B são mensuráveis e disjuntos, então $\int_{A \cup B} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu$.
   (e) Se $f = 0$ q.t.p., então $\int_E f\, d\mu = 0$.

(2) Usando o teorema da convergência monótona, mostre que:
   (a) Se $f, g \in L^1(E, \mu)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha f + \beta g \in L^1(E, \mu)$ e

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu + \beta \int_E g\, d\mu.$$

   (b) Se $f \geq 0$ é mensurável, então $\mu(A) = \int_A f\, dm$ define uma medida.

(3) Calcule, recorrendo ao teorema da convergência dominada, os seguintes limites:
   (a) $\lim \int_0^{+\infty} \frac{r^n}{1+r^{n+2}} dr$
   (b) $\lim \int_0^{\pi} \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2}\, dx$
   (c) $\lim \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cos^n(x)\, dx$
   (d) $\lim \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)^n} dx\, dy$
   (e) $\lim \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1+\cos^n(x-y)}{(x^2+y^2+1)^2}\, dx\, dy$

(4) Mostre que para $x \geq 1$ temos

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, dt = \log x.$$

Sugestão: Use a regra de Leibnitz.

(5) Calcule

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \mathcal{X}_{[0,n]}\, dm.$$

(6) * Podemos escrever um número $x \in [0, 1]$ em base 3 como

$$x = (0.a_1 a_2 a_3 \ldots)_3 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{3^k}$$

onde $a_k \in \{0, 1, 2\}$. Considere a função de Cantor $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{2^k},$$

onde $N = \inf\{k\colon a_k = 1\}$ e $b_k = a_k/2$ se $k < N$ e $b_N = a_N = 1$, com $x = (0.a_1a_2a_3\dots)_3$ (note que podemos ter $N = +\infty$).

Ou seja, consideramos os algarismos da representação em base 3 de x até aparecer um 1. Por exemplo, se $x = (0.02002212001)_3$, então $N = 7$ e temos os algarismos 020022. Dividimos por 2 cada um de forma a obter os b_k's 010011 e definimos $b_7 = 1$. Finalmente, $f(x)$ é dado como o número cuja representação em base 2 é $(0.0100111)_2$.

(a) Mostre que:

(i) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

(ii) f é crescente em $[0, 1]$ e constante em cada subintervalo de $[0, 1] \setminus A$, onde

$$A = \{x = (0.a_1a_2\dots)_3 \in [0, 1]\colon a_k \in \{0, 2\}\}.$$

(iii) ** f é contínua em $[0, 1]$.

(iv) $f' = 0$ m-q.t.p. *Sugestão*: Calcule a medida de A.

(v) $f(1 - x) = 1 - f(x)$ e $2f(x/3) = f(x)$.

(b) Uma função $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua sse g' existe q.t.p. e é integrável à Lebesgue satisfazendo

$$\int_a^x g'(t)\,dt = g(x) - g(a)$$

para qualquer $x \in [a, b]$. Determine se a função de Cantor f é absolutamente contínua.