

Análise Matemática II

LISTA 7

(1) * Considere $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \bar{D}$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Mostre que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ sse para qualquer $i = 1, \dots, m$ verifica-se $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = b_i$.

(2) Seja $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$, dada por $f(x, y) = (x^2 + y) \sin(\frac{1}{xy})$.

(a) Justifique que não existem os limites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y).$$

(b) Prove que existe limite de f em $(0, 0)$ e conclua que pode existir limite de uma função num ponto sem que existam os limites iterados.

(3) Ler capítulo 3.1 de Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*.

(4) Considere $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} k + e^{-\frac{1}{|x^2+y^2-4|}}, & x^2 + y^2 > 4 \\ 5, & x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

Determine o valor de k de modo que $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.

(5) Verifique se as seguintes funções podem ser prolongáveis por continuidade a \mathbb{R}^2 , e nesse caso indique os prolongamentos contínuos a \mathbb{R}^2 .

(a) $f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$

(b) $g(x, y) = \frac{x - y}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}}$

(c) $h(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}$

(6) Dê um exemplo de $f \in C^0(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, tal que:

(a) $f(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}) = [0, 2]$;

(b) $f(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}) =]0, 4]$;

(c) $f(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}) =]0, 4]$;

(7) Determine os pontos de descontinuidade das seguintes funções:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2}, & x \neq 0, x \neq 1 \\ 1 + y, & x = 0 \\ y, & x = 1 \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = (y^2 - 4y + 3) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(8) Considere $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, definida por

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x(2 - \sin(x))}{1 - |y|}}.$$

- (a) Determine o domínio D de f e represente-o geometricamente.
- (b) Defina analiticamente ∂D e indique se D é aberto ou fechado.
- (c) Indique se f é prolongável por continuidade ao ponto $(0, 1)$.

(9) Estude a continuidade uniforme das seguintes funções nos conjuntos indicados:

(a) $f(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ em

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$$

(b) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ em $A = \{(x, y) : y > 0\}$ e

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \leq y \leq 2\}$$