Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2013/2014

EXAME ÉPOCA NORMAL 13 Janeiro 2014

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Justifique todas as respostas

(1) Considere o conjunto

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + (y - \sqrt[3]{x^2})^2 = 1, x > 0\}.$$

(a) Mostre que M é uma variedade diferencial e indique a sua dimensão.

(b) Determine o espaço tangente e o espaço normal de M no ponto $(1, 1)$.

(2) Calcule:

(a) o ponto de

$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon \|x - (1, 2, 3, 4)\| = 1\}$$

mais próximo da origem.

(b) o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

(3) Considere a hipérbole

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = 1\}$$

e recorde as funções hiperbólicas:

$$\cosh\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$

(a) Decida se a função $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$, parametriza uma das componentes da hipérbole H. Em caso afirmativo, indique qual.

(b) Calcule o integral de linha de $f(x,y) = (x^{-2}, 0)$ ao longo de H restringido ao primeiro quadrante.

(c) Decida se $\phi\colon \mathbb{R}^+ \times]0,1[\to \mathbb{R}^2$, $\phi(r,\theta) = (r\cosh\theta, r\sinh\theta)$, é uma transformação de coordenadas.

(d) Esboce

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = r^2, 1 < r < 2, 0 < y < \frac{e-1}{e+1}x\right\}$$

e calcule o integral em S de

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+y}{x-y}\right).$$

(4) Considere um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Prove que

(a) para $\lambda > 0$ e uma função mensurável $f \geq 0$, temos

$$\mu\left(\{x \in \Omega \colon f(x) \geq \lambda\}\right) \leq \frac{1}{\lambda}\int_\Omega f\, d\mu,$$

(b) se $A_k \in \mathcal{F}$ e $A_k \subset A_{k+1}$ com $k \in \mathbb{N}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$